Le continu mathématique :
nouvelles conceptions, nouveaux enjeux

Les grands paradigmes

Les grands paradigmes qui s'affrontent dans le champ des sciences cognitives se laissent volontiers définir comme des façons de mettre les mathématiques au service d'une science de l'esprit.

Le cognitivisme, défini comme un fonctionnalisme computo-représentationnel, s'est fondé, à l'origine, sur l'analogie de l'esprit et de la machine de Turing, la boîte noire du mental étant supposée obéir au modèle du calcul logico-symbolique, c'est-à-dire à l'hypothèse que les rôles causaux sont des rôles computationnels opérant sur des symboles d'un langage interne. En postulant que les représentations sont indépendantes, dans leur structure formelle et leur contenu informationnel, de leur implantation dans le substrat physique, le cognitivisme est contraint de souscrire à un dualisme entre le physique et le symbolique. Par ailleurs, en postulant l'existence de représentations mentales neurobiologiquement implantées dans des états cérébraux et la nature symbolique de ces représentations mentales, le cognitivisme obéit à un réductionnisme du cognitif au symbolique. Comment, dès lors, s'étonner du discrédit qui frappe ces approches mentalistes, dualistes et réductionnistes ? Notons, toutefois, que le cognitivisme sert de repoussoir commode aux approches concurrentes et, en particulier, que l'antilogicisme légitime que celles-ci véhiculent confine souvent, si l'on nous permet cette formule, à l'(antilogic)isme, c'est-à-dire conduit à denier à la logique la possibilité de jouer quelque rôle que ce soit dans la modélisation en sciences cognitives.

Les approches dynamicistes, adossées, entre autres, au rejet du cognitivisme, se sont, *ipso facto*, démarquées du primat théorique de la logique et plus généralement des mathématiques discrètes dont le cognitivisme avait cru pouvoir se suffire. Ces approches dynamicistes ont, *a contrario*, mobilisé les mathématiques continues au travers des modèles d'auto-organisation, des modèles physiques de l'émergence et des modèles de la théorie des catastrophes de Thom et Zeeman. L'un des éléments de l'attrait de ces approches est l'ancrage neurophysiologique supposé de ces modèles dynamiques : un système dynamique, modélisant telle ou telle activité mentale, est supposé avoir un « répondant » cérébral. Il est évident que la référence des modèles dynamicistes aux neurones et aux liens synaptiques plaide en faveur d'une certaine plausibilité neurobiologique à laquelle les approches cognitivistes, qui font de l'activité mentale un simple commerce informationnel, ne peuvent prétendre.

Pour ce qui concerne le rôle joué, ici, par les mathématiques – en l'occurrence les mathématiques continues – et les enjeux cognitifs inhérents aux choix des modèles, un élément fondamental du débat, curieusement peu commenté, est le suivant : les outils de la théorie des systèmes dynamiques, de la théorie des singularités, de la théorie des catastrophes ne sont pas de simples modèles ; ils sont des constituants de ces approches. Au fond, si ces approches peuvent être qualifiées, comme on le fait souvent, de naturalisantes, c'est qu'elles plaident, de façon plus ou moins explicite, pour une unité des mathématiques et de la physique (et de la biologie). Ce réalisme majuscule, outre qu'il tranche le débat inauguré par la naissance de la physique (comment faut-il interpréter les modèles mathématiques de la physique ?), impose au réel d'être continu en son essence.

Un autre aspect de l'attrait exercé par les modèles continuistes est le rejet, déjà mentionné, du logicisme des approches cognitivistes. Mais le clivage logique-dynamique ne doit pas être confondu avec l'opposition continu-discret : un système dynamique peut parfaitement être discret et tous les ingrédients du dynamicisme (état, trajectoires, attracteurs, …), schèmes théoriques majeurs de la modélisation, ont un pendant discret. L'arrimage du dynamicisme à la physique fait que les modèles proposés sont ceux de la physique mathématique qui se déploient sur des espaces (espace euclidien, espace de Hilbert, …) qui « ressemblent », au moins localement, à l'ensemble de réels ou à l'une de ses puissances. Le dynamicisme est, dès lors, contraint d'adopter une ligne hautement anti-constructive. Toutefois, la ligne de clivage réalisme-constructivisme n'épouse nullement aucune des deux oppositions logique-dynamique et discret-continu : d'une part, rien ne s'oppose, dans le principe, à l'élaboration d'une physique discrète et/ou constructive (les développements récents en théorie des cordes et en géométrie non commutative vont dans ce sens) ; d'autre part, continu et anti-constructifs ne sont nullement synonymiques : le constructivisme intuitioniste a toujours revendiqué son inscription au sein des mathématiques continues.

Les approches naturalisantes ne sont pas les seules à revendiquer leur adhésion au dynamicisme continuiste. La théorie des formes sémantiques de Cadiot et Visetti (2001) consiste en une approche « culturalisante » qui, bien qu'elle n'envisage pas, *a priori*, de se soumettre à une modélisation mathématique, obéit à un dynamicisme herméneutico-continuiste. Bien que non directement guidée par la question du continu, mais par celle des formes en sémantique, la théorie établie par Cadiot et Visetti plaide pour un recours au continu, notamment comme fond intuitif de la saisie du sens. Le continu est pour la sémantique la première des ressources puisque les langues et les discours le créent, le déploient et le présupposent d'une multitude de façons : expérientiels-corporels, pratiques-sémiotiques, textuels, etc. (Visetti, 2004). Pour reprendre les propos des auteurs, le recours au continu est exigé par (i) la primauté de leur concept de champ, (ii) le privilège accordé aux descriptions inspirées de celle de l'être-au-monde, considéré comme l'« emblème » d'un modèle indéfiniment transposable, (iii) le primat de la perception c'est-à-dire d'un sens perceptif, (iv) un mode d'interprétation où la dynamicité joue un rôle essentiel, (v) le choix d'une théorie microgénétique des formes d'inspiration gestaltiste, (vi) un rôle premier accordé aux théories de la textualité.

Mais, comme déjà mentionné, ces approches herméneutico-continuistes n'entendent pas s'inscrire dans une démarche de modélisation mathématique, à telle enseigne que le continu qui y est invoqué n'obéit à aucun modèle formel *a priori*.

Aussi sommaire soit-il, cet exposé des recherches sur les fondements mathématiques de la cognition fait clairement apparaître l'apport de (la philosophie des) mathématiques aux sciences cognitives. Les recherches consacrées aux fondements cognitifs des mathématiques mettent en scène l'apport réciproque des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques.

L'un des traits saillants des mathématiques est leur orientation vers la recherche de relations caractérisées par de riches classes d'invariants dont l'un des objectifs est de nous « faire voir » le réel. Les physiciens, en effet, n'utilisent des formalismes mathématiques que ceux qui offrent des invariants, c'est-à-dire des entités qui ne sont pas modifiées par certaines transformations. Ce sont ces invariances qui permettent d'élaborer des lois susceptibles de décrire une réalité physique qui ne soit pas liée à un point de vue particulier. Quel que soit le sens que l'on donne à cette « efficacité » des mathématiques (s'agit-il d'un pur « miracle » ou ne sélectionne-t-on des outils mathématiques que ceux qui « marchent » en physique ?), la question centrale est la suivante : qu'y a-t-il à l'origine de cette capacité du langage mathématique à produire des structures riches en invariants ?

Le fait que les mathématiques soient pourvoyeuses d'un ensemble invariant et stable de formes de construction de connaissance et, conséquemment, que la constitution des théories mathématiques soit un mode de constitution d'une objectivité met en lumière un problème majeur de la philosophie des mathématiques : celui de comprendre comment les constructions peuvent parvenir au degré d'invariance et de stabilité que nous pouvons constater. Que cette notion d'objectivité mathématique soit prise comme une notion ontologique (c'est-à-dire qu'elle renvoie à un univers de concepts qui nous pré-existe et qui s'impose au mathématicien) ou comme une notion épistémologique (en ce qu'elle concernerait l'organisation et la constitution de notre connaissance mathématique), le problème posé est un problème central de la philosophie (et de l'histoire) des mathématiques et un formidable défi lancé aux sciences cognitives : comment les mathématiques peuvent-elles se constituer en tant que connaissance d'objets, que ceux-ci soient par hypothèse donnés à l'avance ou, au contraire, qu'ils résultent de l'activité mathématique elle-même ? Selon quelles conditions cognitives l'objectivation, c'est-à-dire la transformation d'une donnée plus ou moins conceptualisée en objet mathématique porteur d'une connaissance et sur lequel puissent s'articuler des connaissances, peut-elle s'effectuer ? Il va sans dire qu'une telle question prend toute sa force en faisant l'hypothèse (la moins « coûteuse ») que les objets mathématiques sont une construction humaine (c'est-à-dire résultent de l'activité d'êtres humains soumis à une variabilité inter-personnelle et à un contexte historique donné) et pose la question du sens en mathématique. De la possibilité de répondre à ces questions dépend une part de la crédibilité des sciences cognitives.

Ces deux problèmes – celui de l'« efficacité » des mathématiques et celui, corollaire, de la constitution d'une objectivité qu'elles permettent – sont intimement liés puisque le second met en jeu les conditions de possibilité du contenu du premier, mais sont susceptibles de réponses différentes, dans la mesure notamment où la question de l'objectivité peut être appréhendée indépendamment de celle de l'efficacité.

L'énigme de l'efficacité des mathématiques

La question de l'efficacité a reçu, au fil de l'histoire, diverses formulations et diverses réponses (Klein, 2000, Wigner 1960).

Selon Kepler, réductionniste avant l'heure, le physicien étudie du réel ce qu'il est capable d'en saisir par des lois mathématiques. La science a pour objet d'élaborer un modèle propre à éclairer l'intelligibilité du réel. C'est cette même idée que l'on retrouve chez Feynman : si nous faisons de la physique mathématique, c'est faute de mieux ; seules les propriétés du monde exprimables en termes mathématiques nous sont accessibles et la puissance et l'efficacité de la physique tiennent précisément à ce qu'elle a su se limiter aux questions susceptibles d'une réponse mathématique. Einstein formule la question de façon différente (« Comment la mathématique, produit de la pensée humaine, indépendante de toute expérience, peut-elle s'adapter d'une façon si remarquable aux objets de la réalité ? La raison humaine serait-elle capable, sans recours à l'expérience, de découvrir par la pensée seule les propriétés des objets réels ? ») mais ne lui apporte pas de réponse. Dans son fameux article, « La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature », Wigner (1960) considère que cette efficacité des mathématiques relève du « miracle » ou d'un « don magnifique que nous ne comprenons ni ne méritons ». Plus près de nous, Châtelet (1997) manifeste le même étonnement : « Comment se fait-il que la mathématique, qui, dans les sciences, est à la fois la bonne à tout faire et la reine des sciences, soit si utile à cette cuisinière malpropre et performante qu'est la physique ? » En d'autres termes, comment un ensemble de symboles abstraits, manipulés par un jeu axiomatique, issus d'une activité purement intellectuelle, peut-il posséder de telles capacités de modélisation du monde empirique ? Mais Châtelet apporte une réponse : l'unité des mathématiques et de la physique ; les mathématiques seraient constitutives du concept même de réalité physique.

La notion d'efficacité en mathématiques a donc plusieurs facettes.

Tout d'abord, celle associée à la capacité de prédiction : une théorie mathématique est efficace si elle peut anticiper les résultats expérimentaux ou reproduire les données déjà obtenues.

Mais l'efficacité d'une théorie mathématique peut aussi venir de ce qu'elle permet d'expliquer un phénomène empirique. Comme l'a souligné Thom, dans *Prédire n'est pas expliquer* (1991), un modèle prédictif peut parfaitement ne rien donner à comprendre ; de plus, la capacité explicative d'une théorie permet de réduire la diversité des phénomènes à un petit nombre de principes.

Enfin, l'efficacité des mathématiques peut être associée, comme chez Connes, à la « générativité conceptuelle » des formalismes mathématiques : une théorie mathématique est efficace si elle permet d'engendrer de nouvelles idées, de nouveaux concepts ; les mathématiques sont la source principale des principes et des concepts qui permettent d'élaborer de nouvelles théories physiques.

Les grands systèmes philosophiques ont toujours tenté de répondre à la question de l'efficacité des mathématiques, donc à celle du lien entre mathématiques et réalité.

Pour les pythagoriciens, le nombre est l'essence du monde et la structure profonde de la nature est mathématique. Faire des mathématiques revient donc à emprunter le langage même du monde. Le problème de l'efficacité des mathématiques ne se pose pas. La principale objection au pythagorisme est la confusion qu'il impose entre réalité et description de la réalité.

Pour les platoniciens, de Cantor à Connes en passant par Gödel, les mathématiques sont un langage qui permet de passer du monde sensible au monde des Idées et qui permet d'atteindre les structures profondes du monde ; les constructions mathématiques obéissent à une nécessité interne aux mathématiques elles-mêmes, les théorèmes étant à découvrir, pas à inventer. Le platonisme laisse une question essentielle sans réponse : comment la pensée du mathématicien établit-elle le lien avec le monde des Idées ; puisque ces deux mondes sont séparés (à défaut de quoi on retomberait dans le pythagorisme), comment la jonction s'opère-t-elle.

Pour les aristotéliciens, les mathématiques ont une origine empirique, elles se construisent uniquement à partir de l'observation ; la source des mathématiques réside dans cette capacité de l'esprit humain à extraire des formes du monde sensible et à les analyser. Ainsi l'efficacité des mathématiques vient-elle de ce que nous nous servons de structures livrées par le monde physique lui-même. L'objection qui est faite à l'aristotélisme est qu'il ne permet pas de rendre compte d'une certaine autonomie dans la production de concepts mathématiques et de la capacité des mathématiques à « prévoir » de nouveaux objets physiques.

Les kantiens proposent une autre approche de l'efficacité des mathématiques : tout phénomène est constitué, pour nous, dans l'espace et dans le temps, qui sont des formes *a priori* de la sensibilité ; il présente donc une structure immédiatement homogène aux mathématiques. Le kantisme laisse également, concernant le problème de l'efficacité des mathématiques, une question sans réponse : si les concepts mathématiques ont leur origine dans l'entendement pur, comment rendre compte du fait que les mathématiques procèdent, entre autres, de la nécessité interne des formalismes.

Pour le formalisme (Frege, Hilbert), qui voit dans les mathématiques un pur jeu formel défini à partir d'un certain nombre de symboles, le problème de l'efficacité des mathématiques, à moins d'invoquer une mystérieuse « harmonie préétablie », est encore plus difficile à appréhender. Il est, en effet, impossible d'imaginer qu'un jeu arbitrairement défini puisse avoir quelque chose à dire des sciences empiriques. Cette conception des mathématiques comme manipulation aveugle des symboles vides de sens, dont le cognitivisme constitue le dernier soubresaut, a désormais vécu.

D'autres courants philosophiques peuvent être invoqués. Nous y reviendrons lorsque nous aborderons le cœur de la question du continu.

La constitution de l'objectivité mathématique

Les réponses proposées par les grands courants de la philosophie des mathématiques à la question de leur efficacité valent également, dans une certaine mesure, pour la question de la constitution d'une objectivité mais doivent, néanmoins, pour répondre à cette dernière, obéir à de formulations différentes et faire droit à d'autres réponses plus directement liées à la dimension cognitive du problème.

La question de l'apport des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques (ou, si l'on préfère, l'étude des fondements cognitifs des mathématiques) concerne les différentes branches de la discipline, de l'arithmétique à la géométrie, cette dernière, en tant que science transcendante, assumant un rôle clé dès lors que l'on pose la question du sens.

Pour ce qui est de la contribution des sciences cognitives à la philosophie de l'arithmétique, divers auteurs ont avancé des thèses concernant l'étude des conditions cognitives de la constitution des théories mathématiques. Citons, pour commencer, la thèse de Dehaene (1997, 2007) qui postule l'existence d'une capacité innée de perception et de représentation des quantités numériques, capacité qui ne se réduirait pas à celle permettant de procéder à un simple dénombrement. D'après Dehaene (voir la recension par Doridot et Panza, 2004), les hommes seraient dotés d'un organe spécialisé dans la perception et la représentation des nombres, organe dont la présence dans le cerveau serait le fruit de l'évolution de l'espèce humaine. La capacité de cet organe serait telle qu'elle nous permettrait de réaliser avec précision et exactitude des opérations sur des petits nombres mais qui ne pourrait, toutefois, relever de compétences authentiquement mathématiques qu'en se combinant à nos capacités langagières acquises. Les résultats expérimentaux invoqués à l'appui de cette thèse sont sans intérêt pour notre propos dans la mesure où, quel que soit leur intérêt intrinsèque, ils ne sont pas à même, dans l'état actuel des connaissances neurobiologiques, d'attester l'existence dans notre cerveau d'un organe spécialisé dans l'arithmétique des petits nombres. Ce qui nous intéresse, ici, c'est l'affirmation de Dehaene, déduite de ses postulats de départ, qu'il est impossible de fournir une définition formelle du concept de nombre au motif qu'un tel concept serait « primitif et indéfinissable ». Nos tentatives de définition se heurteraient à une circularité. Dehaene croit pouvoir s'appuyer sur la critique de Poincaré des définitions ensemblistes des nombres entiers. C'est oublier que l'opposition de Poincaré porte sur le programme logiciste d'un fondement de l'arithmétique sur la logique. C'est également oublier que l'objet d'une définition formelle n'est pas d'asseoir ses propres conditions de possibilité. Affirmer, en outre, comme le fait Dehaene, que l'on peut faire l'économie d'une définition formelle des entiers naturels car nous serions censés en avoir une appréhension intuitive équivaut à supposer que les théories mathématiques, du moins celles qui relèvent de l'arithmétique élémentaire, décrivent une réalité qui leur est transcendante, partant à adhérer – position que l'auteur récuse par ailleurs – à une forme plus ou moins « honteuse » de platonisme mathématique ; position qui laisse, en outre sans réponse la question – de l'auteur lui-même – de savoir sur quelles bases s'élaborent les constructions symboliques toujours plus abstraites dont les mathématiques sont pourvoyeuses. Cette position ne permet pas non plus d'aborder la question de la constitution d'une objectivité mathématique puisqu'elle se condamne à en ignorer les conditions de possibilité – ainsi à passer par pertes et profits la dimension cognitive de cette objectivation : l'hypothèse que l'étude des théories mathématiques se limite à celle de leur structure formelle, c'est-à-dire de leur logique interne sans faire place à l'étude du processus de leur constitution, congédie toute possibilité de contribution des sciences cognitives aux fondements des mathématiques.

C'est en s'appuyant sur les travaux de Dehaene, que Lakoff et Núñez (2000) développent leur point de vue sur l'émergence des concepts mathématiques. Les auteurs postulent l'existence d'un certain nombre de mécanismes cognitifs nécessaires et suffisants pour en rendre compte. Tout d'abord, pour les auteurs, certains mécanismes mathématiques sont innés. C'est le cas, par exemple, de ceux impliqués dans l'arithmétique. Ces mécanismes, communs à certaines espèces dont l'espèce humaine, permettent d'isoler immédiatement jusqu'à trois unités. Comme pour Dehaene, ces mécanismes innés ne sont toutefois pas suffisants pour engendrer des concepts proprement mathématiques et doivent être couplés avec d'autres mécanismes pour permettre de dériver de nouveaux concepts. De plus, grâce à un système universel, à la fois perceptif et conceptuel, de relations spatiales qui se décomposent en « schémas d'image » de nature gestaltiste, il est possible, selon les auteurs, de pratiquer des inférences sans avoir recours à une logique symbolique. Par exemple, pour les auteurs, le concept mathématique de classe dérive, via un schéma d'image particulier, de la notion de collection ; celui de calcul infinitésimal de celle de mouvement, etc. Enfin, le mécanisme métaphorique est universel. Il s'agit d'un mécanisme cognitif qui relève directement de la pensée. La métaphore est alors définie comme une *inference-preserving cross-domain mapping*. Appliquée aux mathématiques, la métaphore permet de relier entre eux différents domaines conceptuels et, ainsi, d'opérer un véritable travail conceptuel. Les métaphores mathématiques sont de deux types (métaphores de fondement et métaphores de liaison). Le couplage de ces mécanismes permet de mener à bien une analyse cognitive de grands concepts mathématiques, comme ceux d'infini, de continu, d'infinitésimal, etc.

L'approche de Lakoff et Núñez tombe sous le coup des mêmes critiques que celle de Dehaene. Comme le fait remarquer Lassègue (2004), il est impossible de concilier l'hypothèse de l'universalité des mécanismes mathématiques et la multivocité, dans le temps, du sens des énoncés et des concepts mathématiques. Ensuite, la métaphore, définie comme *inference-preserving cross-domain mapping*, est incapable de rendre compte de l'évolution d'un concept mathématique : cette conception de la métaphore n'appréhende la notion de correspondance entre domaines que comme la mise en rapport de domaines déjà existants, donc innés ; comment, avec une telle hypothèse, expliquer l'émergence d'un nouveau concept et rendre compte de son sens problématique ? S'ajoute à cela le fait que les auteurs sont évasifs sur le sens à donner au terme d'inférence. S'il s'agit du sens logique, l'approche des auteurs revient à confondre le processus de construction d'un concept ou d'un énoncé mathématique (et le processus interprétatif qui l'accompagne, avant et après sa naissance) et la cohérence logique à laquelle le concept ou l'énoncé doit finalement obéir[1].

Ces points de vue, de Dehaene et de Lakoff et Núñez, brossés à grands traits, s'inscrivent dans un courant multiforme mais dont le trait distinctif est leur adhésion, au nom du rejet du dualisme, à une conception matérialiste de l'esprit. Comme l'ont montré Benett et Hacker (2003), une telle position est d'emblée contradictoire car, tout en rejetant le dualisme cartésien, elle en conserve les soubassements métaphysiques puisqu'elle se contente de substituer le cerveau à l'esprit et tombe donc dans ce que Bennett et Hacker ont justement appelé le « sophisme méréologique », sophisme consistant à attribuer aux parties les propriétés du tout. Affirmer, en effet, que le cerveau, plutôt que l'être humain, pense, réfléchit, décide et agit et donner à une telle métonymie un statut philosophique et mathématique constitue une erreur, symétrique du sophisme cartésien en vertu duquel c'est l'esprit qui est responsable de la pensée et le sujet d'inhérence des propriétés mentales. Cette métaphysique, adoptée par de nombreux représentants des neurosciences (Damasio, Libet, …) et de nombreux philosophes (Searle, Dennett) est une métaphysique « paracartésienne »(Baertschi, 2009), grosse de confusions conceptuelles.

Symétriquement, il ne semble pas que ces questions (en particulier celle des origines cognitives de l'arithmétique) fassent partie des domaines d'investigation

[1] C'est à partir de ces critiques que Lassègue (2004) nous invite à coupler l'analyse de la pratique mathématique en termes cognitifs avec une analyse de cette même pratique en termes culturels et, pour ce faire, de tirer profit de l'analyse de la constitution historique de la rationnalité de Cassirer (1929).

et de réflexion des philosophes et historiens des mathématiques. Sans doute faut-il reprendre ces problèmes à partir des réponses léguées – à des fins autres mais, néanmoins, conformes aux visées des sciences cognitives – par la tradition phénoménologique : on pense, en premier lieu aux œuvres de Husserl sur la *Philosophie de l'arithmétique*.

La question de l'origine cognitive de la géométrie remonte, elle, aux travaux de Poincaré qui, *dans la Science et l'hypothèse*, aborde le problème de la naissance dans l'esprit humain de l'idée d'espace géométrique. Il y répond, en substance, de la façon suivante : puisque cette idée ne semble pas s'imposer à notre esprit, c'est que nous y avons accès par le biais de nos sensations. Plus précisément, pour instruire la question, Poincaré formule deux hypothèses : tout d'abord, la géométrie, en tant que cadre de nos sensations ou en tant que théorie mathématique, ne saurait être considérée comme une forme *a priori* s'imposant à notre sensibilité ; par ailleurs, les composantes visuelle, tactile et motrice de nos représentations sont induites par des actions séparées de la vue, du toucher et des sensations musculaires. Fort de ces deux hypothèses, Poincaré conclut que nos sensations permettent de singulariser une « classe particulière de phénomènes », appelés déplacements mais que la géométrie ne naît que par idéalisation de ces phénomènes comme éléments d'une structure que nous leur imposons. Dans *La valeur de la science*, Poincaré affine son point de vue : il définit la position d'un objet dans l'espace par le geste qu'il convient d'effectuer pour le saisir.

À partir des travaux fondateurs de Poincaré, s'est développé un courant de recherche qui tente de tirer profit des études récentes en neurophysiologie (Berthoz, 2001) et qui entend mettre en évidence les relations entre la constitution de l'espace physique (réseau de codages et de représentations analogiques nécessaires à l'action du sujet) et celle de l'objectivité de l'espace géométrique. Reprenant et précisant le point de vue de Poincaré, l'idée maîtresse de Berthoz est que la perception ne se limite pas à une interprétation des messages sensoriels mais qu'elle est simulation interne de l'action et anticipation des conséquences de celle-ci : la perception est une action simulée. C'est sur le point de vue théorique de Poincaré et certains résultats expérimentaux des neurosciences – notamment ceux de Berthoz – que Longo (2003) et Tessier (2006) adossent leur recherche des fondements cognitifs de la géométrie. Celle-ci est, en fait, motivée par le désir de fonder, non seulement la vérité des théorèmes, mais également leur signification : il s'agit, par exemple, de développer une analyse des aspects du raisonnement qui fasse appel à des jugements sur le continu spatial, sa connexité, ses symétries, etc. Cette quête du « sens cognitif » des énoncés mathématiques s'appuie donc sur les progrès récents des neurosciences qui étayent l'idée d'un fondement biologique au rôle constitutif joué par l'espace et le temps dans notre « représentation » des phénomènes, rôle dont l'importance a été soulignée, notamment, par Kant, Poincaré, Riemann, Weyl et Thom. De façon un peu plus précise, selon les termes mêmes de Tessier, le cerveau est le siège d'activités involontaires et inconscientes dont une partie « ressemble à des mathématiques », ces activités inconscientes intervenant dans nos activités conscientes comme réservoir de sens. Ce que nous percevons comme signification serait alors une résonance, au sens physiologique du terme, entre notre pensée consciente et la structure du monde telle que l'interprètent, inconsciemment, nos sens.

Le système vestibulaire joue un rôle est crucial puisqu'il permet au sujet qui marche de voir un monde stable. Mais il est surtout une centrale inertielle qui garde le souvenir de toutes nos accélérations. En application du principe galiléen de relativité, le seul mouvement qui ne donne aucun signal au système vestibulaire est la marche à vitesse constante dans une direction fixe. Cet état dynamique d'excitation minimale est appelé la droite vestibulaire. Elle est paramétrée par le temps et scandée pas nos pas. Par ailleurs, l'architecture fonctionnelle des aires visuelles permet au sujet de détecter des courbes et, particulièrement, des droites. La détection d'une droite correspond ainsi à un état dynamique d'excitation particulier d'une assemblée de neurones du cortex visuel. Cet état dynamique est appelé droite visuelle. Enfin, les relations étroites entre le système visuel, le système moteur et le système vestibulaire sont ténues et semblent donner un substrat biologique à l'analyse de Poincaré selon laquelle la position d'un objet dans l'espace visuel est lié à l'ensemble des tensions musculaires correspondant au geste qu'il faut effectuer pour le saisir par l'équivalent d'un changement de coordonnées.

Tessier en conclut que l'évolution de nos systèmes de perception a créé une correspondance entre la droite vestibulaire et la droite visuelle, correspondance cruciale pour fonder la signification de la droite, et appelé « isomorphisme de Poincaré-Berthoz » par Tessier. C'est cet « isomorphisme » qui nous permettrait d'imaginer que nous avançons le long d'une droite géométrique, d'accepter comme évident le fait que le temps est paramétré par une droite réelle et d'accepter que l'ensemble des réels ait la puissance du continu et soit archimédien. La droite mathématique aurait alors pour signification l'objet proto-mathématique obtenu par identification de la droite visuelle et de la droite vestibulaire et notre intuition mathématique portant sur les nombres réels proviendrait de cet être proto-mathématique. Cette construction mathématique de la trajectoire paramétrée par les réels, ferait sens pour nous car fondée sur la mémoire d'un geste.

L'évaluation critique de cette approche ne saurait être entreprise ici. Contentons-nous de mentionner que, à l'instar des approches naturalisantes en sciences cognitives dont elles sont le négatif (au sens photographique du terme), ces approches sont contraintes, sur le plan de la philosophie des mathématiques, d'obéir à une forme de réalisme et, sur le plan cognitif, d'arrimer les concepts mathématiques à des structures innées.

Le réalisme mathématique et ses rivaux

Ces diverses approches soulignent le rôle éminent du continu mathématique et de ses différentes appréhensions dans l'étude des fondements mathématiques des sciences cognitives et des fondements cognitifs des mathématiques. Si, en particulier, les recherches des origines cognitives de la géométrie et des fondements géométriques du cognitif se sont développées ces vingt dernières années, c'est parce qu'elles ouvrent la voie à l'étude du sens des concepts et énoncés mathématiques et sont ainsi des points de passage obligés de l'étude de l'intuition et du raisonnement mathématiques. Si, par ailleurs, le continu (mathématique) y occupe une place centrale, c'est que ces recherches privilégient le rôle de l'espace et du temps et, à la lumière des travaux fondamentaux de Riemann et Poincaré, prolongés par ceux de Weyl, Enriques et Thom, affirment le rôle constitutif de l'espace et du temps dans notre représentation des phénomènes.

Faire de la géométrie, à la suite de Riemann et Poincaré, l'élément clé d'une recherche du sens et des origines cognitives des mathématiques, c'est évidemment faire litière du formalisme, c'est-à-dire des points de vue de Frege et Hilbert sur la réductibilité des mathématiques à un traitement de suites finies de symboles vides de sens – et du cognitivisme qui est le versant « cognitif » du formalisme.

Une des hypothèses sous-jacentes au rôle clé du continu et de l'espace est celle de l'existence d'une expérience pré-formelle du continu : conscience du mouvement d'un mobile entre deux points, conscience du tracé continu de la main entre deux points, pour reprendre les termes de Desanti (1992) dans les *Idéalités mathématiques* ; mais une expérience qui, à la différence de ce qu'affirme ce dernier, n'appartient pas en propre au mathématique mais à son intuition, en l'occurrence une intuition herméneutique, selon les termes de Salanskis (1991). L'intuition est ce qui donne à voir cette activité pré-formelle, laquelle rend possible l'activité proprement mathématique. Aucune activité mathématique ne serait possible sans cette couche pré-formelle grâce à laquelle tout prend sens. Ce qui importe également, ici, c'est que cette intuition est de manière privilégiée celle de l'espace : la prise en compte – ou la réhabilitation – du thème de l'intuition implique, en effet, la reconnaissance d'un lien profond entre les mathématiques et leur soubassement pré-formel, d'un côté, et l'attribution d'un privilège à la question de l'espace, d'un autre.

Chaque tentative de reconstituer la généalogie du continu renvoie aux formes premières de la philosophie : Pythagore, Platon, Aristote. Les problèmes posés sont d'une importance considérable par leur profondeur (philosophique et mathématique), leur permanence dans le temps (des origines de la philosophie aux recherches actuelles) et leur portée interdisciplinaire.

Le continu aristotélicien, infiniment divisible, non compositionnel, inachevé et porteur d'un infini potentiel, constitue, du moins si l'on en croit Thom (1988), la première approche géométrique du continu, approche fondée en premier lieu sur un rejet de la générativité arithmétique, héritée de Pythagore. Cette approche, qu'il faut bien définir, une fois replacée dans le contexte de sa naissance, comme une « révolution » n'a toutefois pas dévoré ses enfants. Elle a, en effet, irriguée de multiples recherches postérieures : Port-Royal, l'*Analysis situs* leibnizienne, la conception kantienne du continu géométrique et, pour ne mentionner que les principales étapes, les approches dites phénoménologiques de Peirce, Brentano et Husserl[2].

---

[2] Encore convient-il de mentionner avant d'en revenir au continu proprement mathématique, que, selon Ricœur, dans *Temps et récit 3* (1985), les conceptions phénoménologiques du continu, notamment la phénoménologie du temps, se heurtent, depuis ses origines chez Augustin jusqu'à ses développements récents, à des apories indépassables. Ricœur en dénombre trois. En premier lieu, la constitution d'une phénoménologie et d'une cosmologie du temps correspond à deux modalités différentes d'accès à une connaissance du temps dont l'hétérogénéité conduit à deux perspectives qui peuvent se succéder mais pas se donner ensemble ; la partialité de l'une et de l'autre est irrémédiable, qui rend une synthèse impossible. La seconde aporie, repérée par Ricœur, porterait sur l'unité du flux temporel : la totalité du temps ne « peut être que le corollaire de sa continuité », la continuité du temps étant elle-même aussi impénétrable que celle de la totalité comme le montrent, notamment, les multiples tentatives infructueuses de lever les paradoxes de Zénon. La troisième aporie, la plus ardue, surgit selon Ricœur chez Husserl : elle consiste en l'impossibilité de principe de suivre les dynamiques constitutives du temps jusqu'à leur source. Au total, le temps serait phénoménologiquement « irreprésentable » et toute tentative de contournement ne conduirait qu'à retrouver le langage de la métaphore et du mythe. Ce n'est pas ici le lieu d'approfondir ces questions. Contentons-nous de renvoyer le lecteur à

C'est la conception aristotélicienne du continu (et de l'infini), qui a irrigué les travaux de mathématiques et de philosophie pendant plus de deux millénaires, que la théorie des ensembles, créée par Cantor et Dedekind, va « rayer de la carte » : le continu devient « sans épaisseur », donc ponctiforme, l'infini est un infini en acte. Avec l'intrusion de l'infini actuel au sein des mathématiques, la théorie des ensembles « déspatialise » l'espace. L'arithmétisation du continu dissocie la construction mathématique de l'« espace », en particulier la construction de la droite réelle, de l'espace perceptif. Le réalisme mathématique dont la théorie des ensembles est empreinte est généralement affublée du terme de platonisme mathématique (philosophie selon laquelle les propriétés mathématiques sont vraies dans la mesure où elles rendent compte d'objets abstraits indépendants de la subjectivité humaine), bien qu'aucun des mathématiciens ou philosophes réalistes n'ait tenté de fonder leurs théories sur une exégèse des travaux de Platon et que ce dernier n'ait revendiqué pareille filiation. C'est, toutefois, l'identité apparente du statut ontologique des idées platoniciennes et le statut ontologique des objets mathématiques du réalisme qui vaut à ce dernier la référence au platonisme. Nous tiendrons, conformément à l'habitude, les deux termes de platonisme et de réalisme mathématiques pour de parfaits synonymes.

Si l'on doute encore que les mathématiciens, dans leur pratique quotidienne, puissent adhérer à ce réalisme majuscule, il suffit de lire Connes pour finir de s'en convaincre. Ce dernier affirme, en effet, dans (Changeux & Connes 1989) que les mathématiques nous permettent de communiquer avec une forme non humaine d'intelligence – les vérités mathématiques étant indépendantes de toute subjectivité et de tout facteur culturel, anthropologique, … La recherche mathématique est ainsi une exploration visant à découvrir une réalité qui se dérobe au regard profane : « la réalité [mathématique] à laquelle on est confronté est tout aussi solide que la réalité quotidienne. La frustration éprouvée par le mathématicien qui ne parvient pas à voir ce qui se passe dans cette réalité est tout à fait comparable à celle d'un aveugle qui cherche son chemin » (Connes).

Ce qu'il y a de commun à tous les tenants du platonisme, c'est le sentiment que les résultats sont découverts et non inventés : le mathématicien explore l'univers mathématique comme le physicien scrute la structure de la matière, comme le géographe découvre une région inconnue. Le réalisme souscrit à l'idée, déjà présente chez Platon que les mathématiques traitent des objets mathématiques comme la biologie traite des êtres vivants. Mais le réalisme n'est pas pour autant monolithique et se décline, au contraire, en diverses acceptions.

Le réalisme logiciste de Frege et Russell, s'il est bien un paradigme du réalisme mathématique, est également et avant tout, une forme de logicisme. C'est pourquoi on se contentera de cette simple mention.

En revanche, le platonisme apriorique de Gödel mérite un examen particulier, notamment en ce qu'il révèle et met à nu (c'est bien le moins pour un platonicien !) celui de la théorie des ensembles à la Cantor-Dedekind. Gödel, tout

---

l'ouvrage de Parrachini (2008), intitulé *Chronoscopie*, où l'auteur montre que, en renouant les liens avec Michotte (1962) et la Gestalttheorie, le temps, loin d'être une difficulté fatale pour la phénoménologie, se révèle, au contraire, la solution même des apories communes à toutes les théories qui s'y rapportent.

en acceptant l'idée d'une proximité entre logique et mathématiques, maintient qu'il existe une distinction entre les deux et récuse la perspective logiciste (même s'il lui est arrivé de donner, dans certains de ses écrits, quelques gages à cette option). Le réalisme de Gödel s'appuie, entre autres, sur l'hypothèse de la nécessité de comprendre le sens d'une proposition avant d'en comprendre une preuve. Sachant, par ailleurs, qu'en vertu du principe de bivalence, une proposition est vraie ou fausse et admet une valeur de vérité et que le sujet peut la saisir sans nécessairement pouvoir lui attacher une valeur de vérité au moyen d'une preuve, la proposition ne peut donc pas avoir été construite par le sujet. Ce fossé irréductible, selon Gödel, entre construction et signification d'un énoncé est un des arguments qui lui permettront d'affuter ses propos assassins contre l'intuitionisme brouwérien (sur lequel nous reviendrons). Ce qui fonde, à la fois, l'anti-logicisme de Gödel et son adhésion à la théorie des ensembles de Cantor c'est le fait, selon lui, que les paradoxes posent un problème à la logique et à la philosophie des mathématiques mais en aucune façon aux mathématiques. C'est la compréhension de l'ensemble, c'est-à-dire la conception qui fait de l'ensemble une notion logique, qui est réfutée par les paradoxes. L'ensemble défini extensionnellement (deux ensembles sont identiques si et seulement si ils contiennent les mêmes éléments) à un statut comparable à celui d'un objet physique, au sens où il ne renvoie pas à une réalité extérieure ; les notions intensionnelles dont traite la logique renvoient, elles, à une réalité qu'elles représentent et qui leur est extérieure. Par ailleurs, Gödel tire de ses théorèmes d'indécidabilité une conclusion qui accrédite sa conception réaliste des mathématiques : puisque l'incomplétude montre qu'un système d'axiomes quelconque (mais non contradictoire) est condamné à ne pas pouvoir répondre à certaines questions et que le tiers exclu nous impose que ces questions aient une réponse, les propositions mathématiques ont un sens et une vérité indépendamment des capacités humaines à les découvrir. Les objets mathématiques ne sont donc pas une construction humaine.

Le réalisme naturalisé, porté par des mathématiciens et des philosophes comme Quine et Maddy, est d'une facture différente de celle du réalisme apriorique de Gödel. Le réalisme de Quine se résume à l'affirmation que le philosophe (et le mathématicien) n'a pas de point de vue sur le réel qui puisse être indépendant du schème conceptuel que constitue la totalité des sciences ; la philosophie, située au sein de ce schème, émet des jugements qui n'ont pas de nécessité ni de validité supérieures à celles des sciences particulières. L'approche de Maddy, qui s'inscrit dans cette perspective naturaliste quinéenne, présente l'intérêt complémentaire d'interférer directement avec certains aspects des sciences cognitives. Maddy entend, en effet, en s'appuyant sur des éléments empruntés à Piaget, établir que les humains ont un accès direct à certains objets mathématiques. Maddy fait l'hypothèse de l'existence dans le cerveau d'un détecteur neuronal d'ensembles, un autre processus nous permettant d'acquérir la capacité de formuler des croyances sur les ensembles que nous percevons. Ces croyances fourniraient une justification aux axiomes élémentaires de la théorie des ensembles. L'argument central de Maddy est le succès de la théorie des ensembles et son rôle dans fondation de l'arithmétique. La possibilité de reconstruire (du moins le croit-elle) la quasi-totalité des mathématiques à partir des axiomes de la théorie des ensembles l'amène à considérer que cette dernière épuise la totalité des objets mathématiques et, ainsi, à affirmer leur existence (Sabatier, 2009).

Le platonisme transcendantal (Petitot, 1995), dont se réclament les approches naturalisantes en sciences cognitives, diffèrent – du moins en apparence – de ces formes radicales de platonisme en ceci qu'elles ne promeuvent pas l'idée d'un réalisme ontologique mais d'une objectivité des mathématiques. Le problème fondamental est, dès lors, celui des relations entre mathématiques et objectivité notamment d'interpréter le continu comme une forme d'objectivité. La solution à ce problème passe par une maîtrise formelle du continu que l'on sait impossible dans ZFC[3] et qu'aucune tentative d'extension (grands cardinaux, forcing, Ω-logique) n'a permis à ce jour d'atteindre.

Le platonisme mathématique est l'objet de nombreuses critiques et objections dont certaines ont déjà été brièvement mentionnées dans la partie consacrée à l'efficacité des mathématiques. La première objection, dont Quine s'est fait l'un des avocats, est que le sens que l'on donne à la notion d'existence est attaché à son application aux objets empiriques de la vie quotidienne ; donc difficilement applicable aux entités mathématiques. La gratuité de la supposition de l'existence d'« objets » que l'on ne peut percevoir heurte nos habitudes de pensée.

Une autre objection est fondée sur la difficulté, dans le cadre du réalisme, de l'accès épistémique aux entités mathématiques. Si les objets mathématiques ont une existence, au même titre que ceux du monde empirique, alors la découverte d'un théorème nous dit quelque chose des objets mathématiques concernés par l'énoncé du théorème, de la même façon qu'un résultat de biologie expérimentale nous informe sur les êtres vivants. Mais, à la différence des objets étudiés par les disciplines empiriques, il semble impossible de distinguer ce qui constitue l'objet mathématique des propriétés que l'on peut lui attribuer. Comme le remarque Benacerraf (1965), le platonisme, selon lequel un nombre est un objet, est incapable de formuler du nombre une propriété autre que celle que lui confère sa définition.

Une dernière objection majeure au platonisme est liée au fait que les objets mathématiques sont censés n'exister ni dans le temps ni dans l'espace ni agir causalement. Dès lors, comment les objets mathématiques, privés d'effectivité causale, pourraient-ils entretenir une relation avec des objets du monde physique ? Si les objets mathématiques sont dissociés de ceux du monde physique, les premiers ne peuvent pas rendre compte des seconds ; le rôle des mathématiques dans l'élaboration des théories physiques devient incompréhensible (Balaguer, 1997 ; Sabatier, 2009).

D'autres objections peuvent être faites, mais les critiques les plus radicales du réalisme mathématique sont, évidemment, le fait des tenants du constructivisme mathématique. Le constructivisme se définit par deux composantes. Sur le plan ontologique, les objets mathématiques n'existent pas par eux-mêmes mais sont le résultat de constructions mentales du mathématicien. Sur le plan méthodologique, un objet mathématique n'existe que si l'on peut produire une preuve de son existence, preuve permettant d'en produire effectivement une instance : le fait que

[3] Axiomatique de Zermelo-Fraenkel augmentée de l'axiome du choix (pour tout ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur X, appelée fonction de choix, qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments)

l'hypothèse de la non existence d'un objet conduise à une contradiction ne permet pas de conclure à l'existence de ce dernier.

Les différentes versions du constructivisme plongent leurs racines dans des traditions anciennes, depuis les sceptiques jusqu'aux nominalistes, mais ont toutes en partage l'héritage de la pensée kantienne : la connaissance des phénomènes résulte d'une construction effectuée par le sujet.

Sur un plan formel, le constructivisme s'est développé essentiellement en opposition au réalisme mathématique, la question du continu constituant le point nodal de la controverse. L'exigence constructive, sur le plan mathématique, s'est en effet appuyée, en premier lieu, sur les approches phénoménologiques du continu (voir ci-dessus), en particulier la méréologie, développée par Lesniewski (1927-1931), notamment, à partir des travaux de Husserl. Celui-ci, dans *Méditations cartésiennes* (1929), manifeste son attachement au continu aristotélicien et son opposition à la possibilité d'une connaissance du continu. La méréologie de Lesniewski se pose comme un formalisme rival du formalisme ensembliste, en substituant aux notions d'appartenance et d'ensemble celles de « partie » et de « tout ».

L'intuitionisme, auquel on réduit souvent le constructivisme mais qui n'en est qu'une des formes, est né des réflexions de Brouwer pour qui l'intuition est la signification ultime de l'acte mathématique. Pour un intuitioniste, la vérité d'une proposition cède sa place à sa prouvabilité : une proposition n'a de sens qu'à travers l'acte qui consiste à la démontrer. La logique intuitioniste, construite sur ces principes, rejette, entre autres, le tiers exclu (pour une proposition p donnée, « p est prouvée vraie (c'est-à-dire non contradictoire) ou p est prouvée contradictoire » n'est pas valide), la possibilité de déduire l'existence d'un objet de la preuve du caractère contradictoire de sa non existence,, et l'axiome du choix. Mais l'intuitionisme se fonde également sur un rejet de l'infini actuel et du continu ponctiforme de la théorie des ensembles à la Cantor-Dedekind et a pour ambition de redéfinir le continu et l'infini sur des bases constructives.

L'intuitionisme a suscité diverses critiques : sur le plan philosophique, le solipsisme de la conception brouwérienne des mathématiques ; sur le plan mathématique, son manque d'efficacité. Mais ses liens avec, d'un côté, l'informatique théorique via le λ-calcul, et, d'un autre, la géométrie via la théorie des topoï et la théorie des faisceaux, permettent à la logique intuitioniste d'échapper au subjectivisme et au solipsisme originels et lui offrent un substrat géométrique.

D'autres formes de constructivisme peuvent être versées au dossier d'instruction : l'analyse non standard, la théorie descriptive des ensembles, les reverse mathematics, …

Ces différentes approches et toutes celles qui font l'objet d'une mention ci-dessus convergent pour faire de la question du continu et de ses diverses conceptions un enjeu majeur de l'étude des fondements mathématiques de la cognition et des fondements cognitifs des mathématiques. Les articles du dossier s'emploient à défendre l'une des conceptions du continu mathématique.

Présentation du dossier

L'article de Pierre Cassou-Noguès, *Le continu et les intuitions mathématiques. Problèmes liés à l'intuition mathématique dans la pensée de Gödel*, aborde la question du continu mathématique sous l'angle des réflexions de Gödel sur le continu, l'intuition mathématique et les problèmes métaphysiques liés à la possibilité d'une intuition non sensible : comment concevoir et définir cette faculté qui nous met en rapport à des objets apparemment non sensibles ? L'argumentaire de l'auteur s'appuie essentiellement sur les articles inédits de Gödel, articles conservés à la bibliothèque de Princeton.

L'auteur s'attache, en premier lieu, à discuter les différents modes d'intuition que Gödel distingue. Gödel se réfère, en fait, à différentes intuitions auxquelles il ne donne pas la même fonction. Le continu, par exemple, est posé comme corrélat d'une triple intuition. Notre intuition concrète nous donne un continu géométrique, en contradiction avec nos intuitions ensemblistes. Il y a, ensuite, un concept de continu qui est donné dans l'intuition abstraite. Enfin, le continu est posé comme corrélat d'une intuition idéalisée, c'est-à-dire comme susceptible d'être parcouru par un esprit possible. Cassou-Noguès défend l'idée, en ce qui concerne les rapports entre intuition idéalisée et intuition abstraite, que la première donne les ensembles comme extension et la seconde donne les concepts mathématiques. En d'autres termes, Gödel assigne deux orientations possibles aux mathématiques et à la logique : une orientation extensionnelle qui détermine la théorie des ensembles ; une orientation intensionnelle appelée à fonder une théorie des concepts. Cette distinction entre ensemble et concept correspond donc à une distinction entre deux intuitions : l'une qui suppose une idéalisation des formes de l'intuition sensible sur le modèle de l'*Esthétique transcendantale* et qui détermine la théorie extensionnelle ; l'autre, plus apparentée à l'intuition catégoriale de la phénoménologie de Husserl, qui détermine la théorie intensionnelle.

Par ailleurs, l'auteur montre que ces références de Gödel à l'intuition s'enracinent dans un questionnement métaphysique beaucoup plus vaste. Sur les différents problèmes métaphysiques abordés (le rôle du temps dans la pensée mathématique, la possible existence d'un organe mathématique, etc), les analyses de Gödel sont, toutefois, le plus souvent incompatibles entre elles. Son hypothèse d'un organe de l'intuition abstraite, par exemple, entre en contradiction avec ses remarques sur le caractère désincarné, inhumain, de l'intuition mathématique. Il est impossible de savoir si Gödel pensait pouvoir concilier ces différentes thèses dans une métaphysique inspirée de Leibniz ou, comme semble l'indiquer sa correspondance avec Wang, s'il faut voir ses différentes analyses comme des fragments isolés insusceptibles d'être intégrés dans un système.

En outre, l'article de Cassou-Noguès montre que des questions aussi essentielles de la philosophie des mathématiques que le statut de l'intuition du continu, de l'infini, du géométrique ont des répercussions directes sur ce qu'on entend par cognitif.

C'est également à une réflexion sur l'intervention des mathématiques dans les recherches cognitives, en particulier au sens que peut y prendre le continu, que l'article de Jean-Michel Salanskis, est consacré. Celui-ci, intitulé *Le continu dans la philosophie cognitive*, aborde la question de la modélisation continue et de sa portée ontologique en sciences cognitives, en s'appuyant, entre autres, sur une comparaison de l'intervention du continu dans la sphère cognitive à ce qui se passe dans le domaine de la physique.

L'auteur s'attaque, pour commencer, au statut du continu à l'intérieur même du champ mathématique. La vision de la pratique et de l'objectivité mathématiques, qui s'est dégagée des débats du siècle dernier, se ramène à l'existence d'une strate minimale et originaire des mathématiques (la strate de la procédure formelle, c'est-à-dire ce qui peut se communiquer sans ambiguïté comme acte portant sur des marques symboliques et obéissant à une motivation systématique) et d'une seconde strate, celle de l'objectivité corrélative (qui permet la construction d'une multiplicité d'objets satisfaisant un même schéma logique). C'est à l'émergence de cette seconde strate que la vision du continu comme structure – étape franchie par les travaux de Bolzano et, plus encore, ceux de Cantor – a puissamment contribué. À l'arrière-plan de ce débat interne aux mathématiques, aux liens des diverses versions du continu avec l'infini et l'espace, se profile le débat de la métaphysique : depuis l'origine, la réflexion sur le continu est lié à une certaine façon de penser l'être, l'un, le multiple, etc.

Dès lors que le continu est envisagé dans sa relation avec les sciences de la nature, de nouveaux problèmes se font jour. Au cours des dernières décennies, les neurobiologistes ont consenti à rapprocher les modèles continuistes de la réalité neuronale : en liaison avec les recherches en sciences cognitives, la neurobiologie s'est avancée sur le terrain de la reconstruction dynamique des compétences cérébrales au moyen de la théorie des systèmes dynamiques. Les modélisations impliquées par de tels travaux – modélisations conduites dans un esprit physicien – laissent toutefois ouverte une question d'une importance épistémologique considérable : le continu dont on a besoin est-il un continu à la Cantor-Dedekind ou un « pseudo-continu », c'est-à-dire un discret d'une granularité extrêmement fine, interrogation soulevée de l'intérieur même des recherches évoquées. C'est bel et bien aussi par sa faculté de donner sens à la notion de discontinuité que le continu s'impose comme outil théorique. Plus généralement, l'emploi du « langage de la dynamique », donc l'emploi du continu, en physique, révèlerait une tension entre l'intérêt mathématique pour le continu en tant que substrat et l'intérêt physico-mathématique pour le continu en tant qu'élément de la dynamique.

Dernier volet de la constellation des problèmes abordés par Salanskis : le réductionnisme des sciences cognitives à l'égard du continu comme des mathématiques en général. Ce réductionnisme doit, selon l'auteur, être combattu dans ce qu'il croit autoriser en fait d'assertion philosophique.

Dans ces différentes réflexions, la philosophie est constamment convoquée : comme métaphysique, gardienne des vues générales sur le continu ; comme épistémologie, chargée de comprendre l'intervention du continu dans les sciences empiriques ; comme discipline « pré-cognitive » abritant des théories de la pensée que les sciences cognitives s'efforcent d'intégrer.

L'article de Jean Petitot, *A transcendental view on the continuum : Woodin's conditional platonism*, explore les possibilités de modéliser, à l'intérieur d'un univers de ZFC, la transcendance du continu par rapport à sa maîtrise symbolique.

L'objectif de l'auteur est de rendre justice, dans le cadre de la théorie cantorienne des ensembles, à la conception classique selon laquelle le continu est une donnée primitive, intuitive, indécomposable et non compositionnelle.

L'article consiste essentiellement en une discussion de la vision du continu par Woodin. Celui-ci s'attaque, depuis une vingtaine d'années, à l'un des problèmes les plus fondamentaux de la théorie des ensembles : l'hypothèse du continu. Woodin estime avoir « presque » prouvé que, dans tout bon univers des ensembles, l'hypothèse du continu est fausse. Un peu plus précisément, Woodin s'attache à prouver la fausseté de l'hypothèse du continu, dans toute théorie des ensembles compatible avec les axiomes des grands cardinaux et qui rendent les propriétés des ensembles de cardinal jusqu'à aleph-1 invariantes par forcing, comme celles des entiers le sont dans ZFC.

Selon Petitot, les difficultés liées à l'élaboration d'une « bonne » définition ensembliste du continu justifient une certaine variété du platonisme gödelien, qui permet d'introduire des axiomes additionnels et tant qu' « hypothèses physiques » comme si les univers d'ensembles devaient être explorés comme une réalité « empirique ».

La critique anti-platonicienne des mathématiques, en particulier des grands cardinaux, comme relevant de croyances naïves est, selon l'auteur, elle-même naïve car elle repose sur une méprise de la nature du platonisme envisagé. Il ne s'agit pas d'un platonisme ontologique en vertu duquel l'univers des ensembles est unique et ZFC complètement déterminé. Il faut substituer à ce dernier un platonisme conditionnel au sens de Woodin, lequel peut être vu comme un type de platonisme transcendantal.

L'article de Dirk van Dalen, *The return of the flowing continuum*, aborde la question du continu selon la vision intuitioniste. Après une brève introduction sur le « scandale » du continu, van Dalen présente les théories exposées par Brouwer dans sa Dissertation de 1907 et qui lui serviront de point d'ancrage dans les développements qu'il en donnera par la suite. Brouwer, dans sa thèse, ramène le continu intuitif au sein de sa philosophie intuitioniste. Les concepts d'ur-intuition (ou intuition du temps) et de deux-ité, sur lesquels repose l'essentiel de l'édifice brouwérien, permettent l'appréhension conjointe des entiers naturels et du continu. Par ailleurs, la notion d'ur-intuition, qui prend corps dans le glissement du temps, admet comme cas particulier l'induction et la récursion.

L'auteur s'attache, dans la deuxième partie de son article, à montrer en quoi les mathématiques intuitionistes, en tant qu'activité mentale du sujet, sont contraintes de rompre avec certaines lois traditionnelles de la logique, en particulier le principe du tiers exclu et, conséquemment, avec le raisonnement par l'absurde et certaines propriétés des quantificateurs. Sont abordées également les suites de choix, instrument choisi par Brouwer pour engendrer les réels. Ce second acte de l'intuitionisme, amorcé en 1918, marque la naissance d'un univers brouwérien autonome au sein des mathématiques : associé aux suites de choix, le principe de continuité, clé du traitement des quantifications sur lesdites suites, permet de définir un continu non atomique ou, si l'on préfère, indécomposable.

Sans entrer dans les détails techniques, l'article de van Dalen met en valeur les traits caractéristiques du continu intuitioniste : sa saveur aristotélicienne (en ce qu'il est non atomique) et kantienne (en ce qu'il procède de l'intuition du temps), son caractère dynamique et « fluide » qui interdit qu'on y fasse des coupures.

C'est également à la notion de continu indécomposable ou cohésif que l'article de John Bell, *Cohesiveness*, est consacré. Un espace est dit cohésif s'il est « d'une seule pièce », au sens littéral de l'expression, c'est-à-dire au sens de l'inséparabilité de l'espace en deux parties. En logique classique, en raison de la validité du tiers exclu, les espaces cohésifs se réduisent à des espaces vides ou à des singletons. En revanche, la logique intuitioniste permet l'existence d'espaces cohésifs non triviaux et garantit que tout espace connexe peut être cohésif.

Les notions d'espace connexe et d'espace cohésif, bien que de formulation récente, plongent leurs racines dans une histoire qui va d'Aristote à Brentano en passant par Veronese. On peut voir, selon Bell, l'approche aristotélicienne du continu (un espace est continu si deux parties constituantes quelconques ont une frontière commune), comme une version faible du continu cohésif. L'apport décisif de Veronese à la conception du continu est son appréhension de la nature du point : pour Veronese, un point ne peut pas être une partie d'un continuum. Brentano a consacré, lui aussi, une part importante de son œuvre à l'examen de la nature du continu. Pour le philosophe autrichien, à l'instar d'Aristote et de Brentano, un continuum ne peut pas être constitué de points : les points ne sont que des frontières qui n'existent que potentiellement.

Un tournant décisif dans la définition du continu cohésif est l'émergence de l'intuitionisme brouwérien. Une des caractéristiques du continu intuitioniste, qui le rend suspect aux yeux de nombreux mathématiciens et philosophes, est l'invalidité de la loi classique selon laquelle deux nombres réels quelconques sont comparables. En dépit, ou en vertu, de cela, le continu intuitioniste semble fournir un meilleur modèle du continu intuitif. Le caractère cohésif du continu intuitioniste se manifeste dans le fait qu'en séparant un continuum en deux parties, quelque chose est « perdu » qui s'apparente à une « colle » invisible réunissant les deux parties avant la césure. La répétition de ce processus de division conduit à une multitude d'atomes qui, en raison de la disparition de la « colle », ne permet pas de reconstruire le continuum d'origine.

Au-delà de ce substrat philosophique de l'intuitionisme, désormais bien connu, les espaces cohésifs peuvent être étudiés au sein de divers modèles catégoriques (au sens de la théorie mathématique des catégories) de la théorie intuitioniste des ensembles. Il est possible de construire plusieurs topoï contenant des objets cohésifs non triviaux.

Solomon Feferman, dans *Conceptions of the continuum*, approfondit la réflexion esquissée dans son article sur le *Das Kontinuum* de Hermann Weyl. L'idée principale est que le continu n'est pas une entité intuitive mais un concept – qui plus est un concept non univoque, ne se limitant pas, en particulier, à son usage en théorie des ensembles. Ainsi, contrairement à ce qu'a avancé Gödel, l'hypothèse du continu n'est pas, selon Feferman, un problème bien défini, en raison du caractère intrinsèquement vague des concepts de fonction et d'ensemble qui interviennent dans sa formulation.

Selon l'auteur, le terme de « continu » relève de diverses approches, géométrique, algébrique, analytique, topologique, ensembliste, etc. Ainsi avons-nous affaire, quand on parle du « continu », à divers objets ou concepts. C'est pourquoi Feferman défend l'idée d'un conceptualisme opposé à l'option réaliste (lequel confère au continu une existence individuée et indépendante de l'esprit) et qu'il examine les diverses conceptions du continu selon le point de vue de son « structuralisme conceptuel ». Celui-ci se place en concurrent du réalisme de la théorie cantorienne des ensembles. Le structuralisme conceptuel peut se résumer à grands traits dans les termes suivants : les objets mathématiques sont des entités mentales non déconnectées d'activités concrètes telles que compter, ordonner, combiner ; les objets mathématiques ne sont pas isolés : ils s'inscrivent dans des configurations structurales pré-axiomatiques et pré-logiques ; une pré-compréhension des idées générales d'ordre, de succession, de collection, de relation est un prérequis à la compréhension de leur mise en forme mathématique ; l'idée générale de propriété est pré-logique ; l'objectivité des entités mentales « primitives » et de celles qui en sont dérivées, acquièrent stabilité et cohérence à travers l'expérience et le travail critique des mathématiciens ; l'objectivité des mathématiques est un cas particulier de l'objectivité intersubjective.

Feferman distingue, en fait, six conceptions du « continu » mathématique : le continu euclidien (lignes droites que l'on peut prolonger à l'infini) ; le continu défini analytiquement par Cantor à l'aide de suites de Cauchy ; le continu défini par les coupures de Dedekind ; celui défini par Hilbert dans *Les Fondements de la géométrie* à partir de la construction ensembliste de Dedekind ; celui défini par l'ensemble de tous les chemins d'un arbre binaire « complet » ; celui de l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble des nombres naturels. L'auteur souligne le fait que les définitions de Cantor, de Dedekind et de Hilbert ne sont pas fondamentales en ce sens qu'elles combinent des notions géométriques, arithmétiques et ensemblistes et qu'elles évacuent l'aspect géométrique intuitif du continu. En outre, Feferman montre que les deux dernières conceptions du continu requièrent une ontologie réaliste, présupposée par l'usage du quantificateur universel, et ne peuvent donc être prises en compte par le structuralisme conceptuel.

En écho à son article sur Weyl, l'auteur rappelle que toutes les mathématiques applicables (à la physique, à la biologie, etc.) peuvent être développées de manière prédicative. Il réaffirme, en outre, le caractère artificiel et construit du continu mathématique : quelle que soit la conception que l'on se fait du rapport des mathématiques au réel, il n'y a pas de conception physique autonome du continu. Ainsi peut-on affirmer que les propriétés du continu mathématique qui interviennent dans les applications aux sciences de la nature ne requièrent en aucune façon une conception réaliste du continu.

Dans son article, *Sortir de l'enfer cantorien*, Michel De Glas s'attaque également au continu de la théorie des ensembles à la Cantor-Dedekind, notamment à l'aune des problèmes posés par l'étude des fondements cognitifs des mathématiques et celle des fondements mathématiques du cognitif.

Le continu ponctiforme et l'infini actuel, promus par la théorie des ensembles et ses diverses généralisations, l'actualisme et le platonisme mathématique qui en sont les sous-bassements épistémologiques et les modèles dynamicistes en sciences cognitives sont évalués. Le continu cantorien réduit, selon l'auteur, le continu géométrique à un continu arithmétique et vide ainsi la notion de continu de toute référence aux notions phénoménales d'espace et de temps. En postulant que le continu géométrique peut être paramétré par la droite réelle, l'option cantorienne et ses diverses formulations et généralisations (y compris la théorie des topoï) ouvrent la porte à une cascade de paradoxes. Ces derniers sont entièrement solidaires des paradoxes et limitations des modèles continuistes de la cognition qui fondent, ou sont fondés sur, ce continu mathématique.

Selon l'auteur, les divers constructivismes mathématiques (méréologies et méréotopologies, intuitionisme, constructivisme non standard), créés notamment pour pallier ces paradoxes, ne sont pas parvenus, sur le plan épistémologique, à rompre réellement avec une vision platonicienne des mathématiques et, sur le plan mathématique, à concurrencer la domination du continu cantorien. La place réservée à la topologie, pourtant tributaire de cette conception du continu, en est un des témoignages.

La topologie interdit à ces approches censément constructivistes d'appréhender le spatial de façon satisfaisante. Les diverses généralisations de la topologie (espaces abstraits, topologie « sans points », théorie des locales) sont, sur le plan de la saisie intuitive du spatial, des versions déguisées de la topologie ensembliste.

La locologie, créée par l'auteur, a pour ambition de refonder le spatial à nouveaux frais. Cette nouvelle *analysis situs* pallie l'essentiel des problèmes de la topologie en procédant à une formalisation nouvelle des notions d'intériorité, de frontière, de continuité, etc. La logique localiste, qui « émerge » du substrat locologique, se situe également en rupture par rapport aux logiques existantes (affaiblissement de l'axiome du paradoxe positif, affaiblissement du théorème de la déduction, etc.). Le concept de locus fournit un fondement catégorique à la logique localiste et à la locologie.

L'article d'Alain Comtet, *Champs et particules : deux figures du continu et du discret dans les théories physiques*, est une réflexion sur les questions les plus fondamentales qui se posent à propos du continu en physique. Après un bref historique sur les conceptions dualistes discret - continu, point matériel - espace vide rempli par des interactions, puis particule - champ de la physique classique, l'auteur montre que la différence entre ces deux variétés de conceptions dualistes est que celle qui fait appel au concept de champ est fondée sur un principe d'action locale : tout ce qui se passe en un point est déterminé par le champ en ce point. Cette partie historique se termine par une esquisse des développements actuels de la théorie de la relativité générale qui semblent donner corps à un vieux rêve d'Einstein : obtenir des solutions des équations du champ géométro-dynamique représentables en termes d'énergie et de charges localisées spatialement ; le dualisme particule - champ s'efface au profit du second terme, purement continu.

Le concept de champ s'est progressivement imposé dans la construction des théories quantiques relativistes, cadre conceptuel dont l'élaboration s'est accompagnée d'un changement de signification des concepts de localité et de causalité. En théorie quantique des champs, le pôle discontinu du schéma dualiste classique disparaît : les particules n'apparaissent que comme des excitations élémentaires associées aux champs quantiques. La théorie quantique des champs présente, toutefois, une difficulté bien connue, liée à l'apparition de termes infinis. Celle-ci se résout grâce au procédé de renormalisation dont l'un des corrélats est la « protection » des lois mésoscopiques à l'égard des lois microscopiques.

Le concept de protection conduit à celui d'émergence de propriétés mésoscopiques inédites à partir d'un substrat microscopique qui perd de sa pertinence. Cette notion d'émergence, qui renvoie à l'idée qu'il existe différents niveaux de réalité et que chacun d'eux est caractérisé par certaines propriétés fondamentales et irréductibles, après avoir fait l'objet de vifs débats en sciences du vivant et en sciences sociales, a fait irruption dans le champ de la physique. Cette notion pose une question cruciale : comment peut-on la concilier avec celle d'élémentarité ? Deux descriptions de l'univers physique se trouvent alors en conflit : l'une fondée sur une démarche réductionniste visant à rechercher les lois de l'élémentaire, l'autre mettant l'accent sur la notion de comportement collectif et de propriétés émergentes.

L'un des principaux enseignements de l'article de Comtet est que l'affirmation du primat du continu dans les théories physiques doit faire l'objet de multiples réserves. Le continu physique a surtout un statut épistémologique : c'est une notion provisoire, une description commode pour analyser des phénomènes à une certaine échelle. La notion de continu est inséparable de celle d'élémentaire, lequel doit être défini dans le langage des symétries.

Marc Lachièze-Rey, dans *La physique continue*, aborde la question du débat continu - discontinu sous l'angle des incompatibilités entre physique quantique et théorie de la relativité. L'analyse de ces incompatibilités suggère quelques questions sur la continuité de l'espace et du temps, questions qui sous-tendent la recherche actuelle vers une « nouvelle physique ».

Les théories de la relativité, qui ont substitué au continuum géométrique de la physique newtonienne un continuum à 4 dimensions (l'espace-temps), n'ont pas remis en cause la continuité : espace et temps peuvent, en principe, être explorés jusqu'aux échelles les plus infimes ; le continuum est infiniment divisible.

La vision quantique introduit une modification du statut des grandeurs physiques que l'on peut observer ou mesurer ; elles sont désormais qualifiées d'observables. Mathématiquement, l'observable classique est représenté par une fonction pouvant prendre n'importe quelle valeur dans un ensemble ayant la puissance du continu ; l'observable quantique est un opérateur auquel est associé, selon la théorie algébrique des opérateurs, un ensemble discontinu de valeurs, appelé son spectre (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre une mesure de la grandeur physique associée). Le point de vue quantique se traduit donc par l'apparition du discret là où il y avait du continu. Un autre aspect fondamental de la vision quantique est le principe d'indétermination dont l'un des corrélats est l'impossibilité qu'une mesure de position atteigne une précision absolue. Cette impossibilité peut s'interpréter comme l'inaccessibilité du point : une négation, en pratique, de la continuité.

Le pendant géométrique du remplacement des fonctions par des opérateurs est pourvu par la géométrie non commutative. Les espaces considérés, appelés espaces flous (sans rapport avec la « logique » floue), ne contiennent pas de points ; l'accès au continu a disparu sans que l'on puisse, pour autant, parler de discontinu.

Divers arguments suggèrent que notre description actuelle de la nature n'est pas satisfaisante. Cette insatisfaction motive une grande part des recherches actuelles en physique fondamentale. Les diverses approches (géométrie quantique, gravité en boucles, réseaux de spin ou réseaux causaux, triangulations dynamiques, etc) introduisent de nouvelles conceptions de l'espace et du temps. Mais elles ont toutes en commun l'idée que le continu que nous expérimentons n'est qu'une approximation d'une réalité géométrique fondamentalement discrète. Notre continuum spatio-temporel ne serait que la manifestation, seulement valable à nos échelles, d'une géométrie quantique plus complexe. La solution aux « défauts » de la physique quantique et de la relativité générale passe, selon Lachièze-Rey, par la disparition de la notion de point.

Références

Baertschi, B (2009), *La neuroéthique. Ce que les neurosciences font à nos conceptions morales*, Paris : Éditions de la découverte.

Balaguer M. (1998), *Platonism and Anti-platonism in Mathematics*, Oxford University Press.

Benacerraf, P. (1965), What numbers could not be, *Philosophical Review* 74, 47-73.

Bennett, M.R. & Hacker, P.M.S. (2003), *Philosophical Foundations of Neuroscience*, Blackwell, Oxford.

Berthoz, A. (2001), *Le sens du mouvement*, Odile Jacob.

Cadiot, P. & Visetti, Y.-M. (2001), *Pour une théorie des formes sémantiques ; motifs, profils, thèmes*, Paris : Presses Universitaires de France.

Cassirer, E (1929), *Philosophie des formes symboliques. La phénoménologie de la connaissance*, Paris : Éditions de Minuit.

Changeux, J.-P & Connes, A. (1989), *Matière à pensée*, Paris : Odile Jacob.

Châtelet, G. (1997), *Les enjeux du mobile*, Paris : Seuil.

Damasio, A . (2001), *L'erreur de Descartes*, Paris : Odile Jacob.

Dehaene, S. (1997), *La bosse des maths*, Paris : Odile Jacob.

Dehaene, S. (2007), *Les neurones de la lecture*, Odile Jacob.

Doridot, F. & Panza, M. (2004), A propos des apports des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques, *Intellectica*, 39, 263-288.

Dennett, D.C. (1991), *Consciousness Explained*, Little Brown and Co.

Desanti, J.-T. (1992), *Réflexions sur le temps. Variations philosophiques*, Grasset.

Husserl, E. (1913), *Idées directrices pour une phénoménologie*, tr. fr. P. Ricœur, 1950, Gallimard.

Husserl, E. (1929), *Méditations cartésiennes*, tr. fr. G. Peiffer, E. Levinas, 1969, Vrin.

Klein, E (2000), La très intrigante efficacité des mathématiques, *Conférence ENSTA*.

Lakoff, G. & Núñez, R.E. (2000), *Where Mathematics come from : How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York : Basic Books.

Lassègue, J. (2003), La genèse des concepts mathématiques. Entre sciences de la cognition et sciences de la culture, *Revue de Synthèse*, 124, 5ème série, 223-236.

Lesniewski, S. (1927-1931), O Podstawach Matematyki I-V *Przeglad Filozoficzny*, 30-34 ; tr. fr. G. Kalinowski, *Sur les fondements de la mathématique*, Hermès, 1989.

Longo, G. (1999), The Mathematical Continuum from Intuition to Logic, *in* (J. Petitot et al., Eds) *Naturalizing Phenomenology : Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, Stanford University Press.

Longo, G. (Ed.) (1999), Géométrie et cognition, *Revue de Synthèse*, 124, 5ème série.

Maddy, P. (1997), *Naturalism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press.

Michotte, A. (1962), *Causalité, permanence et réalité phénoménales. Etudes de psychologie expérimentale*. Louvain : Publications Universitaires Nauwelaerts.

Paracchini, F. (2008), *Chronoscopie*, Mimesis.

Petitot, J. (1995), Pour un platonisme transcendental, in (M. Panza & J.-M. Salanskis Eds.) *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles*, Masson.

Poincaré, H. (1902), *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion.

Poincaré, H. (1905), *La valeur de la science*, Paris : Flammarion.

Ricœur, P. (1985), *Temps et récit 3 : Le temps raconté*, Paris : Seuil.

Sabatier, X. (2009), *Les formes du réalisme mathématique*, Paris : Vrin.

Salanskis J.-M. (1991), *L'herméneutique formelle : l'infini, le continu, l'espace*. Paris : Editions du CNRS.

Tessier, B. (2006), Géométrie et continu, *Logique et interaction : Vers une géométrie de la cognition*, Cerisy.

Thom, R. (1988), *Esquisse d'une sémiophysique. Physique aristotélicienne et théorie des catastrophes*, Interéditions.

Thom R. (1991), *Prédire n'est pas expliquer*, Paris : Champs-Flammarion.

Visetti, Y.-M. (2004), Le continu en sémantique : une question de forme, *Cahiers de praxématique*, 92, 39-74.

Wigner, E. (1960), The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13.