Intellectica, 1992 1/2, 13-14, pp. 45-78

Jean-Michel SALANSKIS

Modes du continu dans les sciences*

Le but de ce texte est de proposer quelques repères, favoriser quelques distinctions, formuler quelques interrogations, à partir d'une expérience épistémologico-philosophique de la question du continu, et de son contraste avec le discret. L'auteur n'ignore pas que sa connaissance des développements actuels des sciences cognitives n'est pas telle qu'il puisse réellement procéder à une évaluation de ce qui s'y passe : lorsqu'il énoncera des possibilités ou des hypothèses à ce sujet, il compte que les spécialistes sauront déterminer leur degré de pertinence, sans lui tenir rigueur de son audace.

L'organisation de l'article est la suivante : dans un premier temps, on essaie de décrire d'une façon générale, sans se soucier des sciences cognitives, plusieurs façons pour le continu d'être présent dans les sciences. On décrit ainsi d'abord le mode canonique d'intervention du continu dans la science physique, qu'on appelle le mode du *continu esthétique* ; on identifie, toujours dans le champ de la science exacte, un autre mode d'intervention, lui aussi classique sans être cette fois canonique, et qu'on baptise mode du *continu outil*. Puis on essaie de présenter — brièvement et sommairement — la ou les valeurs que

* Ce texte est une version remaniée de l'intervention de l'auteur à la journée de réflexion *Continu et Discret dans les sciences de la cognition*, préparée par P. Bourgine et P.-Y. Raccah, et qui s'est tenue le 26 Juin 1990 à l'ENST.

possède le continu dans la discipline qui en est en principe la garante, à savoir la mathématique.

Ce n'est que dans un second temps que l'on envisage la question du continu dans les sciences cognitives. Il s'agit alors de donner des éléments de réponse à la question suivante : y-a-t-il, ou peut-il y avoir dans les sciences cognitives intervention du continu sur le mode *esthétique* défini dans la première partie de l'article, ou bien les sciences cognitives restent-elles vouées au mode du *continu outil* ?

Pour le bon usage des pages qui suivent, quelques précisions sur les références invoquées sont également nécessaires. On peut par exemple se demander en quel sens technique y est pris le mot *continu*. À quoi nous devons répondre de manière modulée :

— Dans l'exposition de ce que nous entendons par *continu esthétique* d'une part, *continu outil* d'autre part, le continu est celui de la mathématisation courante, soit, en principe, le continu de l'ensemble **R**, le continu de Cantor-Dedekind, dont on sait qu'il est aujourd'hui construit et caractérisé dans le cadre d'une théorie formelle ensembliste (**R** est un corps ordonné connexe où **Q** est dense, par exemple fabriqué comme le quotient de l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs dans **Q** par la relation $a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$) ; mais il n'est pas nécessaire de revenir à cette détermination mathématique du continu dans sa précision pour comprendre la distinction entre continu esthétique et continu outil, il suffit de penser que le mot *continu* vise le continu scientifique usuel.

— Dans le passage que nous consacrons aux valeurs du continu dans la discipline mathématique elle-même, en revanche, on évoque — très brièvement — l'existence d'*autres modèles mathématiques du continu* ; dans ce contexte, le mot *continu* renvoie à quelque chose comme une *intuition* ou un *contenu d'énigme*, dont la mathématique serait depuis toujours gardienne, mais qu'aucune détermination dogmatique particulière ne pourrait prétendre recouvrir avec exactitude et sans reste. Cela dit, même dans cette partie de l'article, on évoque aussi la manière dont la mathématique exploite et déploie le modèle classique, le continu de Cantor-Dedekind.

En résumé, notre exposé des modes du continu nous paraît pour l'essentiel “self-contained” pour ce qui regarde les mathématiques. En revanche, cet exposé utilise le *système critique kantien* comme une *référence philosophique*. Non pas au sens où notre argumentation présupposerait tel ou tel point de la doctrine kantienne sans en offrir l'exposé accessible : nous avons essayé de restituer les contenus kantiens, principalement la notion même d'*esthétique transcendantale*, dans un langage qui n'est pas celui de Kant, et d'une manière tout à la fois rapide et suffisante pour les enjeux de l'article. Néanmoins, nous savons que le suivi du sens d'un terme philosophique dans un texte, souvent, suppose plus qu'une définition nominale de ce terme, ou même qu'une restitution comme celle que nous avons tentée : quelque chose comme une familiarité. Il se pourrait donc que nous n'ayons atteint que partiellement notre objectif : que le lecteur ignorant de la *Critique de la Raison pure*, ou depuis longtemps déshabitué du discours philosophique, se sente invité à nous suivre, nous comprendre, et nous réfuter s'il le souhaite.

Venons en donc, après ces précautions, à l'exposé de ce que nous entendons par continu *esthétique*.

I. Le continu esthétique

Ce dont il s'agit, c'est du continu qui intervient dans la physique post-galiléenne, au point qu'il y est devenu pour ainsi dire omniprésent : rappelons qu'aujourd'hui encore, l'analyse réelle et complexe (notamment la géométrie différentielle, l'analyse fonctionnelle et la théorie des représentations de groupe) jouent un rôle déterminant dans la physique mathématique. Au moins à l'origine newtonienne (mais cela reste vrai dans une large mesure dans la physique actuelle, y compris quantique), le continu intervient, on le sait, par l'intermédiaire de l'espace et du temps.

1. Le continu des formes de la présentation

C'est pourquoi il est naturel de se référer à Kant, qui a cristallisé philosophiquement cette époque de la pensée physique. La connaissance humaine, dit-il en effet, est connaissance d'un *divers* qui arrive du dehors, elle n'est pas une connaissance divine de *soi*, ou plus généralement de ce que l'intelligence de celui qui connaît *produit* : qu'elle soit astreinte à “rendre compte” d'une mutiplicité d'éléments *reçus* est ce que Kant décrit comme la *finitude* de la connaissance humaine.

Dans la description kantienne, ce qui est reçu se trouve toujours pris, “avant” d'être soumis à une pensée logico-physique, dans les “formes a priori de la sensibilité” que sont l'espace et le temps. La section qui traite de ce moment fondamental du processus de la connaissance s'appelle *esthétique* transcendantale, en référence au sens grec de αἴσθησις, qui désigne le sensible, *ce qui se montre à nous.* L'esthétique est la doctrine de la *présentation*. Kant expose l'espace et le temps comme les incontournables de la présentation de quoi que ce soit à “nous”. Avant même que je connaisse des propriétés de l'espace et du temps, que je sache leurs déterminations d'une manière ou d'une autre, je reconnais leur caractère obligatoire ; l'espace et le temps sont là dans toute idée, toute esquisse, toute expérience que je peux faire de la présentation d'un divers, ils sont inhérents au *sens* même que possède pour moi la notion de présentation du divers. Par dessus le marché, Kant explore dans les *Expositions métaphysiques* de l'espace et du temps[1] les propriétés que nous prêtons a priori à ceux-ci : essentiellement, ils sont *infinitaires*, ils enveloppent une richesse *actuelle* de rapports infinie, et ce dans l'unité d'une cohérence indéchirable (les rapports spatiaux, les parties de l'espace sont *simultanés* dans un espace *un*). Nous apprenons enfin explicitement dans les *Anticipations de la perception* [2] que les grandeurs spatiales et temporelles sont *continues* au sens d'une définition

[1] (Kant, 1787 : 53-57, 61-62).

[2] (Kant, 1787 : 167-173).

philosophique du continu par l'infinie divisibilité : tel était le secret de la charge infinitaire de l'espace.

2. Le continu du référentiel *physique*

Quel est le lien de l'esthétique transcendantale avec la physique ? La matière dont parle la mécanique classique est supposée “située” dans un continuum mathématique interprétant l'espace-temps, dans un $\mathbf{R}^4$. Le discours de la mécanique est le récit raisonné de ce que peut ou doit être cette *situation* plutôt que directement un discours sur l'espace, le temps ou la matière. On a souvent souligné à quel point cette option marquait un divorce par rapport à la “philosophie de la nature” antérieure. Jusqu'à un certain point, le projet de décrire, raconter l'aventure de la matière sur sa scène spatio-temporelle se substitue au projet de désigner les causes absolues, de comprendre la genèse de ce qui est par rapport à des raisons ou des formes finales. Nous voudrions quant à nous faire deux remarques simples (bien que longues), qui chacune marquent la conformité du schéma physique moderne avec le discours kantien, et justifient notre dénomination de *continu esthétique* pour le continu s'impliquant *de cette manière* dans la science.

2.1. Autonomie mathématique du continu du référentiel par rapport à la théorie causale de la nature

Le continu mathématique, dans ce mode, intervient comme interprétant de quelque chose qui n'est pas physique, et qui est le *pour nous* de la présentation : dans cette utilisation du continu mathématique, il y toujours référence implicite à une sorte d'expérience de pensée primitive, portant sur l'idée la plus abstraite de présentation d'un divers externe, et assumée *au niveau mathématique*, avant toute physique. Si les nombres réels paramétrisent la “particule” ou “l'événement” [x,y,z,t], si les lois s'expriment fonctionnellement par rapport aux paramètres, ce n'est pas pour un motif qui relève de la théorie ou de l'expérience proprement physiques, mais parce que **R** interprète correctement “pour nous” (le “nous” étant en l'occurrence le “nous” historico-traditional de la science occidentale, un “nous” d'abord mathématicien, mais de manière indissoluble philosophe) la *forme de la présentation du divers*. Lorsque nous “pensons” la toile de fond de la présentation du divers, “nous” ne pensons pas n'importe quoi, nous pensons une cohérence et une nécessité, qui “demande” à être traduite comme cohérence et nécessité d'une théorie *mathématique* d'un objet *mathématique*, et la théorie de **R** apparaît aujourd'hui comme une telle théorie.

Cette interprétation mathématique du cadre de la présentation est “guidée” par ce que Kant appelle *intuition pure* de l'espace et du temps, sans qu'il y ait en l'affaire quelque chose comme la dictée transparente d'un contenu, ou la manifestation immédiate et transitive d'un dogme. En fait, ce qu'on dit aujourd'hui sous la forme “les mathématiciens choisissent librement un système d'axiomes codifiant le répondant mathématique du cadre” a toujours été vrai, bien que le niveau du langage formel et le niveau de l'axiomatique n'aient alors pas été spécifiés comme tel : on conférait déjà un rôle régulateur à certains types d'écriture, certains concepts en vue d'une mathématique, et par là se décidait l'essence de l'espace. Cette tâche est interminable et difficile, on y reviendra plus loin dans une brève évocation de ce qu'est le problème du continu pour la mathématique elle-même. L'important est pour le moment que cette tâche existe indépendamment de la physique, et qu'elle témoigne de l'existence d'un niveau de *responsabilité* mathématico-philosophique, où l'on décide de l'essence du *cadre de la présentation*, librement, mais dans un effort de fidélité à l'égard de la question de la présentation, prise comme question de l'espace-temps qui se pose au plan de la pure pensée, au plan métaphysique si l'on veut.

Le sens de l'implication paramétrique du continu est donc en fait le suivant : la physique se pose la question de la *chose* et du *changement*, et cherche à en rendre raison ; pour cela, elle constitue des théories qui décident ce qu'est une chose, ce qu'est un changement, et qui remplissent, c'est au moins le cas à partir d'une certaine date, une prestation prédictive. A ce niveau, la physique est dans sa problématique propre, sa responsabilité s'exerce directement à l'égard de ce qu'elle interroge : elle interprète librement l'essence de la chose et du changement, tout au long de l'histoire, au gré d'une suite de *modèles*, de *théories* (pour parler en termes modernes). *L'implication du continu se produit à l'endroit où la physique n'est pas dans cette autonomie herméneutique* : elle a besoin de représenter, codifier, formaliser la *présentation* du divers, et donc elle emprunte nécessairement à la discipline qui *pense* la présentation, qui interroge celle-ci de manière autonome, ses résultats toujours provisoires. Autant dire que ce que nous appelons implication *esthétique* du continu dans la physique est le lieu névralgique de la relation de dépendance de la physique à l'égard des mathématiques.

2.2. L'improbabilité de la loi physique

Est intimement liée à cette implication esthétique une interprétation de la *modalité*, qui s'impose à la physique ou que la physique impose. Kant perçoit et formule à sa manière cette *version de la modalité*, lorsqu'il explique, réfutant l'argument ontologique, qu'"Etre n'est évidemment pas un prédicat réel"[3]. Ce qui distingue cent thalers possibles de cent thalers effectifs, c'est simplement la position spatio-temporelle (les cent thalers possibles sont suspendus dans l'indétermination de la pure possibilité ; les cent thalers réels sont quelque part, à quelque date) ; ce qui permet la répétition (envers et contre le principe leibnizien des indiscernables), c'est la variation de la position (spatio-temporelle) toujours : deux identiques sur le plan du concept peuvent différer par le lieu et la date. Mais Leibniz est irréfutable sur un point : tout concept authentique de la *possibilité* renvoie à celui de la *contingence*, c'est-à-dire en clair à l'ouverture d'un *champ des possibles*, à une variabilité, une modulation du possible ; le passage du possible à l'actuel ne peut être pensé que comme sélection d'*un* parmi les possibles. Dans le cadre kantien, l'accomplissement du

---

[3] (Kant 1787 : 425-431).

possible en réel est la “chute” dans la position spatio-temporelle, ce qui veut dire encore que la variabilité est celle du point de chute : le champ des possibles est identifié comme le champ des lieux-dates. Que l'espace et le temps soient les formes a priori de la sensibilité, dans le dispositif kantien, cela signifie que *pour une physique* la variation du possible est la variation spatio-temporelle de ce qui est pris comme initial. Le discours kantien nous explique ainsi, avec une grande acuité, ce qui est le *propre de la modalité physique*, ce qui la distingue par exemple de la modalité dont use l'éthique, ou plus simplement la *langue naturelle* (dans *Naming and Necessity* (Kripke 1979), Kripke a bien montré que celle-ci suscite spontanément des mondes parallèles par la simple stipulation d'une de leurs propriétés locales non triviale, par exemple “le monde où Nixon a perdu les élections de 1968”, et que donc le champ des possibles est pour elle absolument ouvert à toutes les façons dont elle est susceptible de spécifier la diversité dans tous les registres).

De cette interprétation de la possibilité découle, en bonne logique, une interprétation de la *nécessité*, qui est ce que l'on appelle ordinairement le déterminisme physique (le “classique” ou “laplacien”) : la nécessité est ce qui se dit de tout possible avec vérité. Fondamentalement, dans le dispositif physique, cette nécessité s'incarne dans la *loi*, en tant que contrainte *sémantique* (au sens logico-mathématique de l'adjectif, lié à la théorie des modèles) sur une issue paramétrique de l'expérience, l'entrée étant connue (la loi est la correspondance comme invariant) : cette issue est déterminée *a priori* par la loi comme objet mathématique ensembliste-idéal (dans le cas le plus simple, un n-uplet de nombres réels).

Cette nature de la nécessité physique est expliquée de manière similaire par Montague dans *Deterministic Theories* (Montague 1974) ; de plus, le texte révèle un aspect de la loi physique lié à l'interprétation de l'espace-temps par le continu mathématique, aspect qui surdétermine le sens de nécessité de la loi, et qui nous importe au plus haut point : son caractère d'expression *improbable* de nécessité. Pour résumer rapidement le propos de Montague, disons que celui-ci envisage les théories physiques comme théories logiques du premier ordre, dans le langage desquelles interviennent à la fois un prédicat P (dont l'extension attendue est l'ensemble des particules visées par la théorie) et des prédicats R et N (dont l'extension est l'ensemble des réels et des entiers naturels, extension prise donc parmi l'objectivité mathématique ensembliste). La co-implication de ces deux réserves sémantiques est traduite dans la théorie par la donnée de symboles fonctionnels correspondant aux “paramètres” pertinents, et qui prennent comme arguments les deux sortes d'entités à la fois (par exemple m(x,t) désigne la masse à l'instant t de la particule x, v(x,t) sa vitesse à l'instant t, dans la théorie intitulée *mécanique*). À cette occasion nous rencontrons un second aspect de l'implication esthétique du continu dans la physique : ce n'est pas seulement que les formes de la présentation, l'espace et le temps, sont interprétées par le continu mathématique, c'est aussi que les paramètres descriptifs de la matière qui se présente, qui entre sur la scène spatio-temporelle, sont décidés comme des nombres réels. Notamment la *masse*, qui exprime d'une certaine façon la pure intériorité inerte de la matière, est repérée par un nombre réel. Kant, dans les *Anticipations de la perception*, rend compte de ce deuxième volet du continuisme physique dans les termes de sa théorie transcendantale de la *sensation* et de son *intensité*.

Mais revenons-en au déterminisme chez Montague. Une théorie *déterministe* est pour lui une théorie telle que, si les états de l'univers à l'instant t sont les mêmes dans deux modèles, ils le sont aussi à tout instant ultérieur. Ceci correspond bien à la notion de contrainte *sémantique* : il y a un invariant, en l'occurrence une famille $(\Phi_{t',t})_{t\ \mathbf{R},t'\ \mathbf{R},t\leq t'}$ d'applications définies sur l'espace des états d'univers, telle que $E(t')=\Phi_{t',t}E(t)$ pour toutes valeurs t, t' satisfaisant $t\leq t'$ et tout modèle (E(t) désignant l'état de l'univers à l'instant t). La nécessité de la loi physique renvoie bien à un choix qui est celui de “modèles”, c'est-à-dire d'instanciations (une seule suffit si la théorie est déterministe futuristiquement et rétroactivement) des paramètres pertinents. Ce choix est choix parmi les “possibles” physiques, donc nécessairement un choix dans le continu (choix d'une certaine famille de nombres réels, dès lors que le continu interprète l'espace-temps et la masse) ; dans le cas mécanique simple, ce choix est essentiellement celui d'une “condition initiale”.

Ce que marque alors supplémentairement Montague, c'est que le discours physique, en fait, ne cherche pas comme lois des invariants ensemblistes quelconques, des applications $\Phi_{t',t}$ absolument générales : en fait, ce qu'on veut, c'est un calcul *dans la théorie* de E(t') en fonction de E(t), c'est-à-dire, en substance, une formule F_δ pour chaque observable δ du langage telle que $[y=\delta(t')\times F_\delta(t,t',\delta(t),y)]$ soit un théorème prouvable[4]. On veut donc une *forme syntaxique* inscrivant l'invariance de la nécessité, et pas seulement un objet ensembliste “mémorisant” la multiplicité de rapports en laquelle se déploie la nécessité sémantique.

Dans la situation physique paradigmatique, les formes syntaxiques sont en fait recherchées de manière contournée : la famille $(\Phi_{t',t})_{t\ \mathbf{R},t'\ \mathbf{R},t\leq t'}$ est supposée *a priori* devoir être donnée par le flot d'un champ de vecteurs définissant un système dynamique. La donnée du champ de vecteurs *dans la syntaxe mathématique employée* vaut alors déjà comme l'inscription syntaxique du déterminisme, qui demande éventuellement à être complétée par l'intégration effective du système dynamique, c'est-à-dire l'expression du flot en termes de “fonctions usuelles”.

L'exigence d'inscription syntaxique entraîne une très forte *improbabilité* de la loi : *a priori*, les familles $\Phi_{t',t}$ sont à choisir parmi de très grands ensembles (des espaces fonctionnels de cardinalité transcontinue) ; en revanche, celles qui se laissent coder par des formes syntaxiques sont en quantité au plus dénombrable, étant totalement caractérisées par l'assemblage de ces formes dans le langage. Le fait

---

[4] On suppose, comme c'est normal et nécessaire dans une telle approche, qu'on s'est donné une liste d'*axiomes physiques*.

qu'on se contente éventuellement d'intégrer numériquement ("point par point") le système dynamique qui régit le phénomène ne change pas essentiellement la situation : l'improbabilité se concentre alors sur la déterminité de la fonction f pour laquelle le système s'écrit x'=f(x,t) ; à cette fonction est ouvert a priori un champ transcontinu, et le projet d'inscription effective du déterminisme, inhérent à la démarche physique, introduira toujours une fonction f identifiée par une forme syntaxique simple (dont la structure, de plus, reflétera en général une conceptualisation explicitable *a priori* du phénomène).

La "nécessité" physique est donc toujours, "en fait", une nécessité improbable, et même infiniment *improbable*, en un sens du mot *improbable* que nous ne pouvons exprimer qu'en termes de cardinalité : ce qui incarne la nécessité *au bout du compte* appartient à une partie infiniment négligeable au sens de la cardinalité par rapport à l'ensemble des objets fonctionnels admissibles comme incarnants-de-nécessité. Cette circonstance flatte ce qu'on pourrait appeler sommairement la conviction platonicienne d'avoir percé le secret de la nature : on éprouve que la simplicité de la nécessité énoncée par la loi ne peut que renvoyer à l'en-soi indépendant de la nature, tant elle est improbable. On est tenté d'estimer qu'on peut seulement "comprendre" qu'une telle nécessité ne soit pas réfutée par l'expérience en supposant que le monde a été constitué selon un schème syntaxique. Ce sentiment s'achève naturellement dans une sorte de frisson théologique, même si Dieu n'est pas nommé.

Il est à noter que l'improbabilité de la loi, de la nécessité écrite, subsisterait si le "réel" était paramétré par **Q**, ensemble dénombrable, puisque l'ensemble des formes syntaxiques serait toujours dénombrable, mais l'ensemble des objets ensemblistes susceptibles d'incarner la nécessité serait déjà de cardinalité continue (fonctions de **Q** dans **Q**). Seulement le continu comme cardinalité est présupposé dans cette évaluation d'improbabilité : la *nécessité improbable* canonique du discours physique exige le continu, au moins dans la méta-théorie. Le fait qu'on se donne en fait le continu dans l'interprétation de l'espace-temps et des aspects fondamentaux de la matière, c'est-à-dire dans ce qui détermine la sémantique officielle de la théorie physique, tout à la fois *majore* l'effet d'improbabilité et le rend plus *transparent* : il résulte que cet effet vaut de manière quasi-patente comme un contenu primordial de l'information apporté par ces théories. Tout se passe comme si les grandes théories physiques classiques disaient “Je suis improbable” en même temps qu'elles énoncent une nécessité au niveau d'une forme syntaxique mathématique.

C'est ainsi que nous concluons notre seconde remarque.

*

Voici donc, en résumé, ce que nous retenons de la figure du continu esthétique :

1) *Le continu est là pour un motif extra-physique, en tant que caractère de la forme de la présentation, identifié par une théorie mathématique, la discipline mathématique étant en l'occurrence la discipline en charge de la question métaphysique ou apriorique de la présentation.*

2) Le fait que la physique inscrive discursivement des lois, dans le cadre de cette référence esthétique au continu, induit un effet d'improbabilité de toute loi ; cet effet s'explicite mathématiquement en termes de cardinalité, mais fait partie de notre “image de la science”, de notre façon de concevoir la science exacte comme infiniment supérieure à toute connaissance purement empirique, et confine à la représentation théologique.

II. Le continu-outil et le continu mathématique

Toujours dans le seul but de clarifier le contexte épistémologico-philosophique de la question du continu dans les sciences cognitives, nous devons dégager deux autres “valeurs” du continu : celle qu'il possède en mathématiques (valeur elle-même double), et celle qu'il possède dans une approche physique ou scientifique *non fondée sur le moment esthétique.*

1. Le continu en mathématiques

La valeur du continu dans et pour les mathématiques, nous en avons déjà évoqué une dimension dans la section précédente : le continu est, pour commencer, un enjeu *herméneutique* pour les mathématiques. Comme nous utilisons ce terme d'une manière non commune, nous allons essayer de préciser ce que nous entendons par là[5].

Les mathématiques sont gardiennes d'une question “Qu'est-ce que l'espace ?”, qui originairement renvoie à la question “Qu'est-ce que le continu ?” ; cela signifie qu'elles assument, et ce depuis les Grecs, la mission de produire un modèle théorique de cet aspect du cadre de toute présentation qui est son caractère *continu*, soit la mission de construire un *continuum paradigmatique.* Toute telle construction vaut comme *réponse* à la question “Qu'est-ce que le continu ?”, et en même temps comme *interprétation* de l'énigme recelée par la question, d'où notre emploi du terme *herméneutique.*

Il y a, aujourd'hui, une réponse dominante à la question du continu, réponse qui a été élaborée au cours de l'histoire en liaison intime avec l'effort pour caractériser l'espace, et qui se condense dans la théorie ensembliste de **R**. Cependant, il importe de savoir que cette réponse n'est pas la seule possible, et que l'herméneutique du continu reste quelque chose d'ouvert : en témoignent des travaux aussi variés que ceux de Brouwer (le continu comme “déploiement”), de Conway (le continu des surréels), ou de Harthong, Nelson et Cartier (le “continu-discret” inspiré par l'analyse non standard) ; cf. (Heyting 1971), (Harthong 1983, 1987, 1989), (Nelson 1987), (Cartier 1991) (Conway 1976), (Ehrlich 1986) ; et nous avons omis de citer bien d'autres travaux qui, de manière

[5] Pour une meilleure exposition, voir (Salanskis, 1991) et (Salanskis, 1991a).

éventuellement indirecte, remanient la même énigme. Ceux que nous avons cité, néanmoins, témoignent de ce que cette question est ouverte *aujourd'hui*, et de manière bien vivante[6].

Le propre de cette relation herméneutique au continu, c'est que ce dernier y est pris comme le nom d'une *énigme*, à l'égard de laquelle les mathématiciens se trouvent dans une situation de *familiarité* et de *désaisissement*. D'une part, ils n'épuisent jamais le contenu de l'énigme, celui-ci reste au-delà de toute maîtrise, le continu persiste à transcender les théories qui, successivement ou simultanément, en rendent compte, donc il y a désaisissement. Et d'autre part, ils repartent toujours d'une "intuition" préformelle de ce qu'est le continu, ou plutôt de ce qu'il "doit être", pour suivre de plus près le langage de la situation moderne, donc il y a familiarité. La question, ainsi, retrouve toujours sa virginité et sa profondeur à partir d'un préjugé non technique sur ce que doit être une nouvelle réponse.

On ne peut qu'être frappé du contraste entre cette valeur du continu pour la mathématique et la valeur qu'il possède pour la physique dans le mode esthétique : alors que le continu, en tant que continu esthétiquement impliqué, fonctionne comme *dogme*, déterminant dans une large mesure la forme et le contenu des théories physiques, il est, en tant qu'enjeu herméneutique de la mathématique, par excellence le point de cristallisation pour une ouverture *problématique* [7].

Il est intéressant et important, cela dit, de se rendre compte qu'il existe, à l'intérieur des mathématiques, un rapport au continu qui est en quelque sorte intermédiaire entre celui de la physique et celui de la mathématique herméneutique du continu. Ce rapport au continu est même, au moins sur la période historique récente, largement majoritaire.

---

[6] Pour une vue synthétique sur le dynamisme actuel de la reprise de la question du continu, cf. (Salanskis-Sinaceur, 1992), dont (Salanskis, 1992), qui est jusqu'à un certain point une version abrégée de cette synthèse.

[7] Cf. (Petitot, 1991) et (Petitot, 1992) pour la même idée.

Tout ce qui relève de l'analyse réelle dans les mathématiques contemporaines, et notamment, le continent de la géométrie différentielle, *présuppose* en effet le continu dominant, le modèle classique **R**. Comme la physique dans son recours esthétique, ces développements mathématiques reçoivent le continu “tout fait”, sans le questionner. La différence est que cette mathématique déploie les potentialités du modèle, c'est-à-dire les innombrables structures où le continu est susceptible d'entrer comme composant à des titres divers. Nous nous contenterons, pour donner une idée de ces potentialités, d'évoquer deux modalités importantes de leur déploiement dans la mathématique contemporaine : la *géométrie différentielle*, où le continu intervient à travers la notion de *carte*, soit comme “modèle local” ; et l'*analyse fonctionnelle*, où le continu intervient en tant qu'il donne lieu à une objectivité de type supérieur, intéressante pour elle-même et dans son rapport avec sa base, sa provenance. Sans entrer dans les détails, c'est-à-dire sans nous lancer dans une tentative de compilation qui excéderait nos forces, remarquons d'une part que ces deux branches recouvrent déjà une énorme quantité de travaux (penser, par exemple, derrière le titre *géométrie différentielle*, à la théorie des systèmes dynamiques, à la topologie différentielle, à la géométrie symplectique …), d'autre part qu'elles sont l'une comme l'autre pertinentes, justement, pour la physique mathématique (les systèmes dynamiques et les équations aux dérivées partielles, par exemple, concernent celle-ci de près).

Nous avons dit néanmoins que cette mathématique qui *présuppose* un modèle du continu déployait *librement* ses potentialités. Nous voulons signifier par là qu'elle se laisse diriger par toute question *autre que celle du continu* par laquelle elle se sent tenue : notamment, dans le cas de la géométrie différentielle, la question de l'espace. Le jeu de construction ensembliste rend en effet possible “d'emporter” la question du continu dans une autre question et d'en déployer les possibilités “hors contexte” : l'ensemble de référence **R** intervient dans les objets cristallisant la problématique propre de la branche (par exemple, **R** est un ingrédient de la structure ensembliste complexe appelée variété *différentiable*). En fait, cette articulation ensembliste assure un peu plus qu'un rapport de fondation définitionnelle, les variétés différentiables ne sont pas seulement construites avec ou sur du continu réel, elles sont *sensibles*, au niveau de leurs propriétés, aux propriétés du continu réel : c'est en ce sens qu'on peut parler de *déploiement* des propriétés du continu dans de telles structures et problématiques géométriques.

La physique, dans sa relation esthétique au continu, sélectionne telle ou telle structure obtenue dans ce déploiement mathématique, en vue d'articuler sa réponse à la question de la chose. À ce niveau a cours le rapport de la physique à la mathématique tel qu'on le conçoit ordinairement. Mais il reste une différence qualitative, ou une différence de principe, entre le déploiement des potentialités du continu dans le cadre de la convention mathématique ensembliste englobante et le déploiement de *certaines* de ces potentialités au service de la physique mathématique, même si une zone de grande proximité théorique, avec rebondissement des questions et des réponses d'un côté à l'autre de la ligne de partage (peut-être par endroit humainement et institutionnellement brouillée), existe de manière indéniable. D'une part cette différence consiste simplement, comme nous l'avons déjà indiqué, en ce que les mathématiciens explorent a priori *toute* structure déployant le continu de façon intéressante, même si elle devait n'avoir aucune pertinence pour aucune des théories ou enjeux de la physique mathématique. Mais, d'autre part — et c'est plus intéressant à nos yeux, dans la mesure où cela témoigne d'un lien entre le régime du déploiement des potentialités et le régime herméneutique décrit par nous auparavant —, les structures qui voient le jour au fil du déploiement intra-mathématique *restent susceptibles d'être mobilisées dans un but fondationnel*. La structure de faisceau, par exemple, a semble-t-il d'abord été conçue en vue de l'étude des variétés différentiables et des fonctions sur ces dernières[8] ;

[8] Cf. (Houzel, 1992).

néanmoins, après être devenue une notion fondamentale de la géométrie algébrique, théorie non immédiatement et simplement liée à la physique mathématique, et pas même dépendante, à son plus grand niveau de généralité, du continu réel, elle intervient aujourd'hui dans une théorie de type fondationnel (la théorie des catégories, plus crucialement la théorie des topoï) où elle joue un rôle pour proposer, peut-être, une nouvelle “version” des ensembles, de l'espace et du continu. Tant il est vrai que le discours mathématique conserve, par delà les spécialisations évidentes, une homogénéité en partie compréhensible et en partie inexplicable, qui fait que la relation de présupposition se renverse facilement, que ce qui est second peut devenir premier au gré d'une autre perspective et d'un autre fonctionnement théorique. De la sorte, l'élément herméneutique fondamental dont nous avons parlé d'abord n'est pas dans une situation de séparation radicale avec le déploiement de structures, confinant dans certains de ses aspects avec la physique mathématique, dont nous venons de parler.

2. Le continu outil

Mais il nous semble important de mettre aussi en évidence un recours au continu en physique, ou plus généralement dans les sciences, qui n'est pas “esthétique”. De cette possibilité, nous connaissons au moins un exemple tout à fait caractéristique : la substitution, en probabilités-statistiques, d'une distribution de Laplace-Gauss (loi normale) à une distribution de Bernouilli (loi binomiale), dans le cas où le nombre de tirages est très grand. Sans que nous connaissions réellement les détails de ce qui se pratique, nous savons que l'interprétation de données statistiques discrètes par un langage continu est une démarche attestée, qui se légitime par des considérations technico-pragmatiques (du type : la plus grande simplicité du “formulaire” continu et l'intérêt de l'outil de différentiabilité pour l'étude de la dépendance fine des effets par rapport aux paramètres). En l'occurrence, il est clair que le continu mathématique n'intervient pas comme interprétant d'une forme de présentation (puisque le “phénomène” est su par ailleurs se présenter de manière discrète :

l'univers des éventualités est *reçu* comme discret), mais comme medium de calcul et d'examen corrélatif des issues de calcul possibles. Le continu est alors l'interprétant d'un cadre d'accueil pour les repères mathématiques eux-mêmes, un deuxième interprétant “derrière” celui de la présentation du phénomène. C'est-à-dire que le continu n'intervient pas ici *avant* la physique proprement dite, comme la construction mathématique adéquate d'une *forme de la présentation* universelle, à laquelle le physicien, le mathématicien, et quelque chose comme le “sens commun métaphysique” accèdent de la même manière : il intervient d'une façon qui n'est compréhensible que par le scientifique-statisticien, habitué à l'*opérativité* du continu. Lorsque nous disons que le continu est alors un interprétant second, interprétant du cadre où s'insèrent les repères numériques eux-mêmes, il ne s'agit en tout cas plus d'une *interprétation de la présentation*. Il m'est loisible de penser les nombres entiers comme jalons sur la droite réelle, étant donné ce que les mathématiques sont ; je n'ai pas besoin de penser la *présentation* des réels pour cela, avec toute la charge philosophique du mot *présentation* (le continu, l'espace se présentent, ils sont un défi présentatif traditionnel pour l'esprit mathématico-philosophique ; les réels sont des entités dogmatiquement contrôlées, ils n'ont plus besoin de se présenter) ; j'use de la loisibilité de ce plongement d'une façon que finalise entièrement et suffisamment ce que je veux sur le plan opératif. Par conséquent, le plongement des repères entiers dans la droite réelle n'*interprète* à la rigueur rien ; la structure mathématique **R** interprète le pré-formel, pré-mathématique qui fait l'énigme de la présentation spatiale, l'énigme du continu, mais **N** s'insère dans **R** sans qu'il y ait besoin que la mathématique interprète quoi que ce soit de pré-mathématique, il suffit qu'elle se souvienne de ses acquis, de ses constructions.

Il est à noter que Carnap, dans les *Fondements de la physique* (Carnap 1973), conçoit en général le choix de l'interprétant de la forme de présentation du divers phénoménal comme déjà dicté par des considérations “pragmatiques”, comme de même nature que la mise en perspective de données entières sur la droite réelle que nous venons de mettre en contraste avec toute idée d'*interprétation* d'une forme de la *présentation*. Autant dire que son optique ne lui permet pas de comprendre la différence de statut du continu que nous exposons ici.

On a coutume d'opposer l'*empirisme logique* au *transcendantalisme* (avant tout kantien) “au nom” du continu mathématique : le second assumerait l'intervention du continu dans les modèles de la physique, alors que le premier ne verrait la science de la nature que comme une théorie logique au premier ordre de l'étant expérimentable (singulier, discret, accessible), ne laissant pas de place au continu. En fait le problème est plus complexe. Carnap, par exemple, dans le texte que nous évoquons, ne nie pas l'intervention du continu, et donc en un sens reconnait que la physique est une mathématisation et non une grammaire du monde, mais il nie que le continu intervienne *comme interprétant de la forme de la présentation*. Il écrit fort clairement :

> Ce n'est jamais l'observation qui décide si telle valeur doit s'exprimer par un nombre rationnel ou irrationnel ; aussi s'agit-il d'une pure question de commodité : qu'est-ce qui sera le plus utile pour la formulation de certaines lois physiques, une échelle numérique discrète ou une échelle continue ?[9].

Le problème est que Carnap ne conçoit rien entre l'observation, entendue en un sens purement empirique, et la commodité, elle-même complètement relativisée à l'opérativité du calcul : ce qu'il y a entre, c'est l'interprétation mathématique de la forme de la présentation, qu'on peut concevoir comme une “observation *a priori*”, ou comme un calcul à vide, sans input, un calcul d'avant le calcul (un calcul *a priori*). L'exemple des probabilités est celui d'une intervention du continu dont ce moment semble absent, et qui paraît donc conforme au schéma carnapien.

---

9 (Carnap, 1973 : 93).

Notons que la motivation du recours au continu dans la modalité du continu-outil peut excéder la stricte dimension instrumentale, centrée sur le calcul, sans qu'on sorte du registre *utilitaire*. Ce que nous avons décrit plus haut comme l'effet d'*improbabilité* qui accompagne la loi physique comme loi nécessaire d'une variabilité continue devient naturellement un *prestige*, dont tout discours scientifique souhaite pouvoir se parer. Cet effet convient à l'idée d'une mise à découvert platonicienne de l'en-soi chiffrant le monde, il situe la science comme plus qu'un assemblage de prédictions opératoires : il suggère une sorte de “puissance ontologique” de la science, fondée sur les mathématiques. Si c'est ce statut ou ce prestige qui sont visés, la motivation est donc encore une motivation de puissance, comme dans la première version de la modalité du continu outil, même s'il ne s'agit plus d'un niveau technique ou calculatoire de la puissance : la loi improbable est la seule qui peut se donner comme ayant eu la puissance de percer le mystère de l'en-soi.

Mais cette prétention est illégitime : l'improbabilité de la loi ne peut se décréter qu'*en regard de la multiplicité des incarnations possibles de la loi nécessaire*. Et pour que cette multiplicité puisse être déclarée relever d'une cardinalité *transcontinue* avec quelque pertinence, il faut que le champ de variation du possible ait lui-même été identifié comme une *multiplicité continue* avec plausibilité ; mais cette identification à son tour ne peut être accréditée que par une *esthétique* au sens kantien, c'est-à-dire d'une théorie de la *présentation* (du divers phénoménal) ; sous cette condition seulement le continu s'impose comme la richesse du possible *au nom de* l'exploration métaphysico-mathématique de ce que nous appelons *présentation*.

III. Le continu en sciences cognitives

Essayons à présent de considérer les interventions du continu mathématique dans les démarches d'intelligence artificielle en nous demandant si elles relèvent d'une “esthétique” ou non, si elles sont “transcendantales” ou “carnapiennes”.

1. Remarques sur des gestes techniques dans la littérature

Commençons par deux observations isolées sur des moments de la littérature technique où le continu intervient, de manière explicite ou implicite. Nos références sont prises dans des exposés “connexionnistes”, mais ce n'est pas l'âme du connexionnisme qui est en cause : sans doute saisissons-nous plutôt sur le vif une tendance du modélisateur cognitif dès lors qu'il s'engage sur un chemin “mathématique”.

On rend volontiers compte des limitations du “perceptron” dans un langage géométrique, en introduisant la notion de “séparabilité linéaire”. Citons (Lecun-Fogelman 1986) :

> Les capacités d'apprentissage de systèmes d'automates à seuil simples sont liées aux limitations intrinsèques des séparateurs linéaires. En effet, seules les classes linéairement séparables — i.e. séparables par un hyperplan — peuvent être discriminées par de telles méthodes. Or on sait que la probabilité que m vecteurs de dimension n soient linéairement séparables décroit très rapidement dès que m dépasse 2n. Ceci implique qu'aucune tâche “intéressante” ne peut être apprise par un automate à seuil. Ainsi, il est facile de voir que sur les 16 fonctions booléennes de 2 variables, 14 sont “calculables” par un automate à seuil [...] et les deux autres, le OU EXCLUSIF et l'EQUIVALENCE ne le sont pas.

La “séparation par un hyperplan” est implicitement pensée dans un espace dont le corps de base est plus riche que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. D'ailleurs la figure accompagnant ces propos dans l'article (la figure 2 dans notre pre-print) représente la situation en dimension 2 par des droites dans un plan géométrique cartésien usuel, que toute une tradition nous fait supputer “valoir pour” $\mathbf{R}^2$. Pourtant, il est bien clair, et marqué dans la citation, que l'intérêt théorique de l'auteur se porte sur la discrimination entre les fonctions booléennes ; la démarche scientifique reste essentiellement orientée sur les “objets d'implémentation”, et par suite, sur la dynamique obtenue sur une famille de “neurones” à éventail d'états discret. Le recours au continu semble, si l'on se limite à cette affaire, essentiellement du même ordre que celui des probabilités-statistiques : ce dont on s'occupe est *su* se présenter comme discret, mais il y a une facilité de langage ou de calcul à plonger cette donnée dans un continuum.

Dans le même article, l'utilisation de la différentiabilité, pour exposer et légitimer l'algorithme de rétro-propagation, nous semble du même ordre : le but est d'utiliser une méthode de *gradient stochastique*, et le recours à la différentiabilité en découle naturellement. Ce but, certes, est lié à une interprétation de l'apprentissage en termes dynamiques qui est le propre du connexionnisme, et qui mérite discussion en elle-même. Mais dans l'article que nous citons, cette interprétation est présentée par l'intermédiaire de la *fonction de coût* qui évalue l'erreur du réseau, et la méthode dynamicienne peut tout à fait être prise comme une simple technique de traitement d'une situation combinatoire complexe, en soi discrète, mais qu'on décide, afin de la simplifier, de regarder comme inscrite dans un univers numérique continu.

Autre référence où la démarche nous semble analogue : la présentation des divers algorithmes d'apprentissage connexionniste dans (Mézard-Nadal 1990) (algorithme du perceptron, variante du minover, algorithme d'apprentissage en grandissant) passe par un discours géométrique du produit scalaire et des hyperplans sans que la nature de continuum du corps de référence soit investie de manière *esthétique*. L'article, en fait, étudie les algorithmes d'apprentissage dans une perspective d'optimisation (maximisation de la stabilité, et donc de la taille des bassins d'attraction) qui se définit à l'intérieur de la métaphore dynamicienne : il s'agit d'une étude mathématique des possibilités et des variantes dans le cadre continu et avec le langage géométrique dont nous avons déjà vu qu'ils étaient introduits à des fins ouvertement instrumentales. Les critères d'optimisation que nous avons évoqués confirment évidemment cette visée instrumentale.

L'article, à ce qu'il nous semble, manifeste d'ailleurs par sa position de parole elle-même ce statut : il est un article de physiciens apportant leurs *méthodes* (méthodes “nées” dans un ambiant où le continu est *naturellement* là pour des motifs esthétiques) à la communauté des informaticiens, sans se soucier de la question de savoir si le continu aurait une raison d'être *esthétique* pour les sciences cognitives :

> A notre sens, l'apport de la physique à ce domaine a été de fournir à la fois un cadre conceptuel et un ”outillage” (au sens de techniques mathématiques) qui permettent d'envisager l'analyse de ces systèmes qualitativement et quantitativement. (p.241).

Bien sûr, plutôt que les physiciens en dialogue avec eux, ce sont en principe les spécialistes des sciences cognitives eux-mêmes qui pourraient, étant en charge de leurs objets, décrire une nécessité non plus seulement technique ou conceptuelle, mais esthétique, de l'intervention du continu. Expliquer que le continu doit intervenir dans leurs modèles parce qu'un certain ordre de diversité phénoménale ne peut être reçu que dans un cadre de présentation qu'interprète *a priori* le continu mathématique. Nous allons examiner rapidement si de telles explications se rencontrent dans deux articles, dont les auteurs sont respectivement Minsky et Smolensky.

2. Minsky

Minsky, dans la version (Minsky 1979) de son article *A Framework for Representing Knowledge*, aborde le problème de manière partiellement oblique.

Tout d'abord, il répond à la question “Is Vision Symbolic?” par “surely every one would agree that at some level vision is essentially symbolic” (p. 6), et esquisse conséquemment le “rendu” de la perception spatiale par des prédicats relationnels du type *left-of, right-of, above*, dont la fonction discrétisante est évidente. Il observe d'ailleurs un effet de bord de cette discrétisation : “the issue of two- vs. three dimensions evaporates at the symbolical level” (p. 6). Semblant rejeter toute référence a priori au continu, Minsky insiste donc sur la différence entre espace externe et espace de la cognition. De fait, l'enjeu de savoir quel est le “cadre” pour une théorie de la *vision* ne se superpose pas, en principe, à l'enjeu de la détermination du cadre pour le *vu* : si la position de la physique classique, conférant le cadre $\mathbf{R}^3$ ou $\mathbf{R}^4$ aux “objets” de la mécanique, est en phase avec l'estimation selon laquelle le vu est *pour nous* pris dans un continuum, il ne s'ensuit pas que la modélisation de la vision doive en passer par ce continuum. A vrai dire, le discours de Minsky semble tout à la fois suivre une telle ligne argumentative, et ne pas saisir le problème clairement à ce niveau : c'est que pour lui, semble-t-il, il n'y a que des questions ontologiques, des questions sur ce qu'il en est effectivement des choses et des processsus “en soi” (réalisme spontané du scientifique).

Juste après ce passage, Minsky concède “Visual experience seems continuous”, et semble, entrant dans le vif du problème, démentir ce qu'il vient d'affirmer. Mais finalement, il apparaît que son énoncé concerne en fait la phénoménologie du temps interne : “A naive theory of phenomenological continuity is that we see so quickly that our image changes as fast as does the scene” (p. 7). Et Minsky exprime cette phénoménologie dans son système des *frames*, retrouvant presque exactement la théorie husserlienne de la temporalité constituante :

> the changes in one's frame-structure representation proceed at their own pace ; the system prefers to make small changes whenever possible ; and the illusion of continuity is due to the persistance of assignments to *terminals common to the different view-frames*. Thus, continuity depends on the confirmation of expectations which in turn depends on rapid access to remembered knowledge about the visual world (p. 7).

La structure sous-jacente à cette théorie de la “continuité”, comme chez Husserl, est celle d'un couple *rétention-protention* qui se remet à jour lui-même en permanence, et, de la sorte, donne simultanément son sens à l'écoulement continu du temps et à la stabilité du “réel” en face.

Mais pour nous, il importe de marquer que ce dont rend compte ici Minsky (comme Husserl d'ailleurs), c'est de la continuité *prédicat de processus* et non du continu *substantif*, noyau de l'intuition de la présentation spatiale. Dans le référentiel topologique moderne, on peut prendre la mesure de l'écart entre ces deux significations : alors que le continu se dit d'un espace topologique *particulier* (**R**) doué de tout un faisceau de propriétés, au nombre desquelles on trouve la connexité, la continuité des applications fait sens *quelle que soit* la topologie de la source et du but. Néanmoins une application ne peut être discontinue en au moins un point de la source que si la topologie de la source est non discrète ; il subsiste donc ce lien entre les deux notions que l'alternative continuité/discontinuité des processus ne fait sens que si le “substrat” que parcourt le paramètre de contrôle du processus est *non discret* (ce qui est notamment le cas si ce substrat est le temps interprété par **R**).

Cela dit, Minsky voit quant à lui cette *continuité* seulement du côté du temps, et en dernière analyse la tient pour illusoire (c'est pourquoi sans doute les remises à jour discrètes des frames lui conviennent en fin de compte)[10].

En résumé, Minsky ne conçoit aucune contrainte *présentative* qui porterait sur ses modèles, et qui exigerait d'eux le continu en quelque sorte. Il n'existe que des “effets” de continu, sans doute illusoires en dernière analyse, et que le modèle de la cognition doit restituer sans en être affecté.

3. Smolensky

Mais il y a tout de même le connexionisme moderne, qui plaide pour l'intervention du continu dans les modèles des sciences cognitives, et semble assumer avec une certaine gravité épistémologique cette option. Essayons de juger ce qu'il en est de ce plaidoyer, de cette gravité, en nous fondant sur le texte de Smolensky *On the Proper Treatment of Connectionism* (Smolensky 1988)[11].

Dans le long résumé qui précède son article, Smolensky écrit “The connectionist models considered are massively parallel numerical

---

[10] Cf. la citation précédente.

[11] Nous nous référons en fait au pre-print de cet article distribué par l'auteur à Cerisy-la-Salle en 1987.

computational systems that are a kind of continuous dynamical system.”, ne dissimulant rien de son propos. Le point *continu* vs *discret*, cela dit, est spécialement discuté dans la section 6.1 de l'article, baptisée *Continuity*.

Dans cette section, Smolensky commence par énumérer (dans une liste qu'épingle le marqueur (23)) les éléments de discrétion que le paradigme symbolique introduit *naturellement* dans le modèle de la cognition. Cependant il écrit que dans l'alternative subsymbolique

> All the discrete features of (23) are neatly swept aside in one stroke by adopting a fondamentally continuous framework.

Nous avons bien le mot *framework*, donc l'idée de *cadre*, essentielle à une problématique de la *présentation*, mais pas l'idée d'une “naturalité”, c'est-à-dire, dans le contexte, d'une signifiance pré-théorique et pré-mathématique de ce cadre continu : la “naturalité” qualifie plutôt la façon dont le cadre classique discret s'impose.

Smolensky fait ensuite face à l'objection selon laquelle les systèmes connexionnistes ne sont pas, *en fait*, continus (les unités, et les poids, prennent des valeurs discrètes, et le temps est lui-même discrétisé) : tout cela ne serait, selon lui, qu'approximation et commodité pour rendre compte de ce qui est fondamentalement à penser comme continu. Assertion qui soulève deux problèmes :

— Le fait qu'on en passe par une implémentation sur des ordinateurs de Von Neumann est-il purement contingent ? Ne reflète-t-il pas quelque chose d'une pré-compréhension de la cognition qui serait en position d'intuition au sens kantien, et pas de stratégie provisoire d'une génération de chercheurs ?

— Si les éléments discrets du modèle approximent un “vrai” ou “authentique” modèle continu, d'où tenons nous le savoir de cette authenticité, de cette légitimité supérieure du continu ?

En d'autres termes, on peut, on doit s'interroger sur la valeur “esthétique” éventuelle du cadre discret qui prévaut dans l'IA symbolique aussi bien que sur celle du continu connexionniste, cette seconde interrogation étant plus spécifiquement la nôtre dans cet article. Or, Smolensky ne nous donne guère qu'une phrase à résonance esthétique, au début de la section :

> Indeed, cognition seems to be a richly intervowen fabric of continuous and discrete processes.

Mais aucune précision ne s'ajoute : la phrase renvoie-t-elle à une supposée évidence du caractère continu de l'entrée du système cognitif? Rien n'est en tout cas exprimé, développé, plaidé. Au contraire, la modalisation “seems” et la coprésence du discret dans la phrase citée paraît traduire un doute au moment d'affirmer l'évidence intuitive de la présence du continu.

À la page 20 viennent ensuite des arguments en faveur du cadre continu. Aucun de ces arguments n'est un argument d'*authenticité* ; le thème dominant est l'efficacité, la puissance de la physique continue :

> By changing the discrete threshold function of perceptrons to a smooth, differentiable curve, and thereby defining continuously-valued units, Rumelhart, Hinton and Williams (1986) were able to apply continuous analytic methods to more complex learning networks. The result has been a quantum leap in the power of subsymbolic learning. [...] The claim here is that the most analytically powerful descriptions of subsymbolic models are continuous ones while those of symbolic models are not.

Smolensky poursuit en avançant l'idée qu'il y a là quelque chose de nouveau, et qui justifie comme tel qu'on l'explore :

> If there is any new theory of computation implicit in the subsymbolic approach, it is likely to be a result of a fundamentally different, continuous formulation of computation.

C'est tout à fait légitime et intéressant, mais ce n'est nullement un argument *esthétique.*

En résumé, si nous nous en tenons à l’article de Smolensky, il y a toutes les apparences littéraires que la référence au continu du connexionnisme soit analogue à l'intervention du continu en probabilités discrètes, et non à l'intervention du continu en mécanique newtonienne. Il nous semble qu'on peut d'ailleurs avancer un argument de fond à ce sujet : “connexionnisme” renvoie à *connexion*, et les connexions, en l'occurrence, constituent un *réseau*, qui témoigne déjà d'une discrétisation. Smolensky parle du caractère discret des valeurs d'activation des unités, des valeurs des poids, et de celles des dates comme d'une approximation, mais ne parle pas de ce niveau plus originaire de discrétion qui est la donnée du réseau comme tel. Or cet aspect du modèle est sans mystère légitimé, depuis McCulloch et Pitts, par la référence au sytème biologique neural : il s'agit donc de quelque chose qui appartient fortement à l'*intention* de la science cognitive. Il en résulte, par exemple, que les poids sont bi-indexés sur deux unités, c'est-à-dire que le concept d'interaction à l'œuvre n'est pas un concept physique moderne d'interaction spatialement distribuée : les champs dont on parle sont du type *champ électrostatique*, des champs discrètement fondés. Le “modèle de Zeeman”, utilisé par Thom pour mettre en avant ses idées révolutionnaires sur la cognition, ne supprime pas à première vue la discrétion du système des unités, puisqu'il met en scène un espace $[0,1]^{\mathbf{N}}$, le facteur **N** du produit (l'ensemble des entiers naturels) paramétrant des entités du type neurone. Cependant, dans le compte rendu du modèle donné par Thom dans (Thom 1970), on ne retrouve plus l'idée d'interaction binaire. Thom écrit “l'évolution de l'état psychique y est décrite par un champ de vecteur X, variant lentement avec le temps”[12], sans ajouter que ce champ est résultant de l'interaction synaptique.

[12] (Thom, 1970 : 153).

4. Motivations non instrumentales concevables du continu en sciences cognitives

En fait, cette évocation de Thom peut nous être utile pour dégager ce qui nous semble être le nœud du problème : pour tout un courant de pensée que Thom représente ici, les neurones et les synapses importent peu, ne sont pas une vraie motivation du modèle. Essayons donc de nous demander ce que peut être cette “vraie” motivation, dans ce qui en elle n'a rien à voir avec la dimension instrumentale. Nous ne voyons que trois motivations *profondes* de faire intervenir le continu dans le domaine cognitif.

1) Jugeant que l'espace est ontologiquement continu, que la perception et le langage le comprennent comme tel, on infère que le fonctionnement cognitif doit être *mimétique* par rapport à cet en soi continu, et qu'il faut par conséquent réussir à modéliser par des systèmes dynamiques continus ce fonctionnement.

2) Jugeant que la sémantique des langues naturelles est infiniment riche et “géniale”, on conclut qu'elle ne peut par principe être réduite au computationnel, et qu'il faut une théorie en profondeur continuiste de la sémantique.

3) Les phénomènes cognitifs apparaissent dans le temps ; ce dernier mobilise le continu à un titre esthétique dans toute la physique ; les sciences cognitives doivent donc être une science continue du déploiement intra-temporel des entités et des structures de la cognition.

N'importe quel connexionniste pourrait naturellement reprendre ces trois arguments à son compte[13]. Cependant, nous croyons important de noter que les deux premiers ne confèrent pas, du moins pas clairement à l'intervention du continu une valeur kantienne, esthétique :

1) Le premier argument opère au niveau de l'en soi et invoque la mimèsis, une homologie nécessaire de la connaissance et du connu ; ce

[13] Peut-être d'ailleurs cela s'est-il déjà produit, nous n'avons pas fouillé les textes.

serait plutôt un argument platonicien ou aristotélicien. En termes kantiens, il n'y aucune conséquence de ce que notre préjugé présentatif sur le divers externe enveloppe le continu, à rien qui concerne notre préjugé présentatif sur les “phénomènes de cognition”. Les “préjugés”, ou éléments de pré-compréhension n'entretiennent pas de liens “ensemblistes” : nous avions rencontré ce point à propos de Minsky plus haut. Il nous semble en effet que sur le strict plan d'une *logique philosophique transcendantale*, l'IA symbolique a raison d'estimer que le cadre pour la théorie du vu n'a pas à se “transposer” en cadre pour la théorie de la vision, cette autonomie résultant de ce que, dans une telle logique, on considère le cadre comme de l'ordre du *pour nous* et pas de l'*en soi* : or c'est seulement dans l'en soi que le vu et la vision sont affines.

2) Le deuxième argument semble de prime abord concerner un *effet* et pas une condition originaire de présentation ; tout le monde, en tout cas tout intellectuel, aura envie d'accorder que le computationnel n'épuise pas le sémantique ; et pourquoi pas, en effet, mobiliser le continu en hommage à l'infinité du sens ? Mais le continu mathématique est lui-même un effet de sens : l'argument énonce une “correspondance” (au sens baudelairien) profonde entre l'infinité englobante du sens et un sens infinitaire particulier, sans posséder pour autant aucune valeur méthodologique ou transcendantale ; ou alors, il faut assumer l'hypothèse qu'il y a un *cadre de présentation du sens*, analogue de l'espace, dont nous avons une certaine *intuition*, en nous laissant guider par laquelle nous serions en mesure de définir un interprétant mathématique de ce cadre[14].

---

[14] Après avoir vécu la journée scientifique dont ce texte provient, je comprends que Bernard Victori suit précisément cette piste. Au point où j'en suis de ma compréhension de son travail, il me semble que son *intuition du sens* reste d'une nature autre que l'intuition-modèle de l'espace, en tant qu'elle est seulement intuition *locale* de rapports, et pas anticipation intuitive, en l'absence de toute réception de sens particulière, de la potentialité de rapports *globale* du sens, comme celle qui inspire dans le cas de l'espace la proposition d'axiomes géométriques, depuis Euclide.

Le troisième argument est, comme son énoncé le manifeste clairement, un argument transcendantal en bonne et due forme. Il est intéressant de se souvenir qu'à leur manière, Kant et Husserl en ont connu la force : pour chacun d'eux, en effet, le *temps* est le cadre de présentation des phénomènes cognitifs, et c'est là une thèse originaire et cardinale de leurs systèmes (celui de Husserl se plaçant d'ailleurs explicitement dans la filiation de celui de Kant). Le problème qui demeure, une fois qu'on s'est mis au pouvoir de ce présupposé, est celui de la possibilité de donner à l'englobement présentatif de la cognition par le temps la même valeur opérationnelle que dans la situation classique de l'espace-temps et de la mécanique. Kant, dans l'introduction aux premiers principes métaphysiques de la nature, juge que la constitution d'une science du sujet sous la gouverne de la forme a priori temps est impossible, parce que le temps, en tant qu'unidimensionnel, n'est *que* continuum, et qu'aucune *intuition formelle* partageable ne peut donc y être fixée[15] : en substance, cela revient à dire que notre “prise” intuitive sur les phénomènes temporels de notre cognition n'est pas telle que nos concepts puissent être mis en rapport par schématisation avec ces phénomènes (implicitement, donc, l'externalité dimensionnelle de l'espace par rapport au temps serait une condition nécessaire à la fondation de la science mathématisée du mouvement). Husserl, quant à lui, essaie véritablement d'accomplir le programme d'une science de la cognition sous la gouverne de sa mise en scène “temporelle”, mais considère comme impossible d'utiliser une version mathématique du continu dans cette entreprise, parce que l'émergence des entités cognitives à partir des phénomènes de cognition lui paraît avoir cours à un niveau pré-mathématique, et en fait *descriptif* plutôt qu'*idéalisant*[16] (l'idéalisation étant à ses yeux le propre du niveau mathématique). Le cadre temporel continu n'intervient donc que dans la guise du *flux héraclitéen*, dont la

---

[15] Cf. (Kant, 1786 : 12-13).

[16] Cf. (Husserl, 1913), §73-74.

"structure" est saisie par une réflexion transcendantale, et pas par une herméneutique mathématique ; ou plutôt, la réflexion saisit ce qui émerge dans le flux, et jamais la structure globale du flux indépendamment de ce qui émerge en elle.

Peut-être peut on reprendre ce problème, et aller au-delà des impasses kantiennes et husserliennes. Nous n'essaierons pas d'entrer dans cette difficulté. Cependant, nous voulons témoigner que nous n'avons pas jusqu'ici rencontré dans la littérature connexionniste de construction théorique allant dans ce sens, ou du moins de manière claire, explicite et systématique. Le fait qu'on représente un contenu du type *catégorie* par un attracteur d'une dynamique, par exemple, nous semble n'avoir actuellement pas d'autre valeur que celle d'un mode de stockage de l'information (qui définit un mode d'apprentissage), sans que les modèles mettent en avant l'adéquation de ce mode de représentation avec la mise en scène de la catégorie comme acteur d'un *déroulement* cognitif. Peut-être les modèles de Amit intègrent-ils cette dimension, mais nous connaissons trop mal le sujet pour en juger. Nous laissons donc aux spécialistes le privilège de réfléchir à la question, si du moins l'angle de discussion que nous avons proposé leur semble de quelque intérêt.

Jean-Michel SALANSKIS

Fondements des Sciences, UPR n° 265 du CNRS

3, rue de l'Université, 67084 Strasbourg Cedex

Références

BARREAU H. & HARTHONG J. Ed. (1989) *La mathématique non standard*, Paris : 1989. Editions du CNRS.

CARNAP R. (1973) *Fondements philosophiques de la physique,* Paris : 1973. Armand Colin.

CARTIER P. (1992) *Une approche résolument finitiste du continu, ou comment vivre avec les contradictions*, in (Salanskis-Sinaceur 1992).

CONWAY J.H. (1976) *On Numbers and Games*, Londres : 1976. Academic Press.

EHRLICH P. (1986) The Absolute Arithmetic and Geometric Continua, *PSA* 1986, vol. 2, pp. 237-246.

HARTHONG J. (1983) Eléments pour une théorie du continu, *Astérique*, **109-110** (1983), pp. 235-244.

HARTHONG J. (1987) Le continu et l'ordinateur, *L'ouvert* **46** (1987), pp. 13-27.

HARTHONG J. (1989) *Une théorie du continu*, in (Barreau-Harthong 1989), pp. 307-329.

HEYTING A. (1971) *Intuitionism, an introduction*, Amsterdam 1971 : North-Holland.

HOUZEL CH. (1992) *L'apparition de la notion de faisceau*, in (Salanskis-Sinaceur 1992).

HUSSERL E. (1913) *Idées directrices pour une phénoménologie*, Paris : 1950. Gallimard.

KANT E. (1786) *Premiers principes métaphysiques de la Science de la nature*, Paris : 1982. Vrin.

KANT E. (1787) *Critique de la Raison pure*, Paris : 1971. PUF.

KRIPKE S. (1979) *La logique des noms propres*, Paris : 1982. Minuit.

LE CUN Y. & FOGELMAN F. (1986) Modèles connexionnistes de l'apprentissage, *Intellectica*, n° 2-3, 1987, pp. 114-143.

MEZARD M. & NADAL J.P. (1990) Réseaux de neurones et physique statistique, *Intellectica*, n° **9-10**, 1990, pp. 213-245.

MINSKY M. (1979) A Framework for representing Knowledge in *Frame conceptions and text understanding*, (D. Metzing Ed.), Berlin, New-York : 1979, de Gruyter, pp. 1-25.

MONTAGUE R. (1974) Deterministic theories in *Formal Philosophy*, New Haven and London : 1974. Yale Universiy Press, pp. 303-359.

NELSON E. (1987) *Radically elementary probability theory*, Princeton (New-Jersey) : 1987. Princeton University Press.

PETITOT J. (1992) *Continu et objectivité*, in (Salanskis-Sinaceur 1992).

PETITOT J. (1991) Idéalités mathématiques et réalité objective, in *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, J.-T. Desanti, Paris, T.E.R., pp. 213-282.

SALANSKIS J.-M. & SINACEUR H. Eds. (1992) *Le Labyrinthe du Continu*, Editions Springer-France.

SALANSKIS J.-M. (1991) Die Wissenschaft denkt nicht, *Revue de Métaphysique et de Morale*, n° **2**.

SALANSKIS J.-M. (1991a) *L'Herméneutique formelle*, Paris : 1991. Editions du CNRS.

SALANSKIS J.-M. (1992) *Le destin du modèle de Cantor-Dedekind*, in (Salanskis-Sinaceur 1992).

SMOLENSKY P. (1988) On the proper treatment of connectionism, *The Behavioral and Brain Sciences*, **11**, pp. 1-23.

THOM R. (1970) Topologie et linguistique, in *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, Paris : 1978. Christian Bourgeois 10/18, pp. 148-177.