Intellectica, 1995/1, 20, pp. 263-266

JALON

Giuseppe LONGO. *Sur l'émergence de l'objectivité des mathématiques*

L'entraînement de base du tout jeune mathématicien passe par la compréhension de la distinction entre ce qui est "général" (et beau, élégant) et ce qui est "ad hoc" (laid, inélégant). En effet, même un bon enseignement scolaire des mathématiques commence à former cette sensibilité: on apprend tôt que pour montrer que les diagonales d'un rectangle sont égales on ne doit pas les mesurer, comme aurait tendance à faire l'enfant, mais le démontrer, indépendamment de tout dessin et de ses mesures ; on apprend ainsi que la somme des angles d'un triangle est un angle plat, par une démonstration, basée sur un dessin, qui ne dépend pas de la forme, ni des éventuelles régularités du triangle dessiné.

Plus tard, le jeune étudiant en mathématiques apprécie la force des notions et des théorèmes généraux d'algèbre, de géométrie ... Ceux-ci sont bien exprimés dans une structure, un espace, une notation spécifique, comme dans la démonstration de la mesure des angles internes d'un triangle, mais leur intérêt réside exactement dans leur indépendance du formalisme et de la structure qui servent à les exprimer. Tout mathématicien connaît la différence entre une propriété du jeu des échecs, dont les règles et leurs conséquences, quoique complexes, dépendent de l'échiquier, et un théorème sur les invariants algébriques, dont le sens réside justement dans sa transférabilité à une pluralité de structures. Il comprend aussi que la divisibilité par 9 des nombres entiers, représentés en notation décimale et dont la somme des chiffres est un multiple de 9, est une bien amusante (et peut-être utile) propriété, mais qu'elle ne constitue pas un théorème de théorie des nombres. Les "vrais" théorèmes de Théorie des Nombres ne dépendent pas du système de notation choisi (décimal, binaire...). La notion de nombre premier, par exemple, les propriétés concernant leur distribution etc. s'appliquent à n'importe quelle représentation des entiers. Même en cryptographie ou dans les bons travaux en complexité de calcul, quand les notations ou les codages deviennent eux-mêmes l'objet d'étude, leurs propriétés sont exprimées par des nombres et on travaille sur ceux-ci, aujourd'hui, avec des outils et des résultats de Théorie des Nombres, qui ne dépendent pas des notations ni des codages.

Dans toute discipline scientifique ou même dans toute forme d'expression humaine, la construction d'invariants joue un rôle important. Toutefois la dépendance des contextes, linguistiques, perceptifs, etc., fait partie de la compréhension et de l'expressivité, en général : toute étude des langues ou des autres formes de communication et de description du monde reconnaît le rôle essentiel des contextes sémantiques, des ambiguïtés expressives, des dépendances de formes de l'expression.

En mathématiques, l'invariance de ses notions et théorèmes par rapport aux notations et aux contextes est le tout premier enjeu, elle est au cœur de sa même nature, de son applicabilité à une grande variété de structures et disciplines. On pourrait dire que l'appréciation de cet invariant cognitif est préliminaire même à l'invention des mathématiques : la géométrie des Grecs se construit autour d'un "platonisme ontologique", qui est d'abord une vision du monde, de la religion et de l'art et qui leur permet d'aller bien au delà des recettes sur la mesure du terrain. Pour les mathématiciens grecs, les formes parfaites de la géométrie ne dépendent surtout pas de leur imparfaite représentation humaine et contingente. L'algèbre pourra vraiment naître quand l'affranchissement des notations trop lourdes et trop "ad hoc" pour les nombres (l'absence d'itération générale dans la notation grecque) permettra de concevoir des propriétés qui n'en dépendent pas. Au cours de l'histoire, le travail dans maintes notations spécifiques a permis d'apprécier le rôle des propriétés algébriques indépendantes de toute notation. Des parcours historiques et cognitifs, donc, très longs et très reliés aux autres expériences culturelles et pratiques des hommes ont conduit les mathématiques jusqu'à l'appréciation moderne de leur propre généralité et de leur statut particulier parmi les formes de connaissance. C'est l'expérience concrète, historique et individuelle, qui pousse le mathématicien à souligner l'objectivité et l'universalité de ses concepts et résultats : celles-ci ne sont que dérivées d'un processus cognitif et pratique, qui a construit les mathématiques comme pointe maximale de nos facultés contingentes d'abstraction. La perception de leur l'objectivité et de leur universalité n'est que le résultat de l'indépendance concrète, vérifiée dans la pratique historique, de leurs propres formes d'expression, de leur "exceptionnelle" invariance conceptuelle.

Malheureusement, la plupart des mathématiciens renverse le paradigme qui est proposé ici : ils déduisent les propriétés d'indépendance et d'invariance de leurs notions et résultats à partir d'un formalisme logicisant ([2,4,5]) ou d'une ontologie platonicienne ([1,3,7]). Le premier a peu de partisans, aujourd'hui, car les limites des laboratoires artificiels de symboles et théories, proposés par les formalistes, ont été bien démontrées, en ce siècle ; si le formalisme joue encore un rôle, c'est plus dans la conception des ordinateurs, des langages de programmations et des systèmes partiels de déduction automatique que dans l'analyse du raisonnement humain. Quand à l'ontologie naïve du mathématicien[1], elle est comparable au sens commun : celui-ci accepte volontier d'identifier les objets réels par des propriétés invariantes (matérielles, fonctionnelles...), qui préexistent à l'observation et à la description. Donc, pour le sens commun et pour l'ontologie mathématique, il y a invariance si et seulement si il y a "objet"; dont on fait suivre que toute invariance cache un objet. Notre but, au contraire, est de souligner le rôle de ces invariances, en tant qu'origine de l'objectivité et de l'universalité des mathématiques, sans faire recours au jeu formaliste des symboles sans signification, ni à l'ontologie naïve habituelle. Maints mathématiciens se servent de cette dernière aussi pour expliquer pourquoi nous savons raisonner si bien, juste pour construire "Les Mathématiques" telles qu'elles sont, ainsi que l'extraordinaire efficacité des mathématiques. Cette "explication" se justifie plutôt par la stupeur du mathématicien face à son extraordinaire performance cognitive : la vision directe de formes et structures abstraites, indépendamment ou au delà de toute notation algébrique ou croquis sur le tableau noir. Stupeur comparable à celle de l'enfant qui dit avoir les yeux juste pour voir le monde tel qu'il est et le voir parfaitement. Non, nous voyons puisque nous avons des yeux et nous voyons comme nous voyons. Nos vicissitudes évolutives et historiques nous donnent ces yeux ainsi que nos invariants cognitifs (ces derniers, très différents d'une civilisation à l'autre) ; la pointe de l'iceberg, en termes d'objectivité et d'universalité, on l'appelle "Les Mathématiques". Elles sont efficaces, comme est efficace notre vision : on y fait des choses formidables, mais on n'arrive pas à voir les microbes qui nous tuent, ni la lumière au delà d'une bande très limitée. De la même façon, on a construit des édifices grandioses comme la théorie analytique des Nombres ou la théorie des Catégories, des applications fantastiques comme les ordinateurs et les fusées interplanétaires, mais on n'arrive même pas, ou pas encore, à démontrer la stabilité du système solaire ni à décrire, mathématiquement, la mousse de la bière (en effet, dès que l'on s'éloigne des constructions mentales ou artificielles, les difficultés et l'arbitraire des représentations mathématiques augmentent). L'efficacité des mathématiques", qui est là, de toute évidence, est relative aux autres formes de connaissance et aussi contingente que le reste de notre vie

[1] Bien différente du "platonisme transcendal" en [6], qui est compatible avec la thèse ébauchée dans cette note.

humaine. Elle est en effet extraordinaire autant que l'est son niveau d'objectivité et d'universalité.

Si donc l'on veut comprendre le statut unique des mathématiques comme partie de l'effort humain de connaissance, il faut les faire participer des formes d'expressions concrètes, linguistiques et spatiales. En même temps, il faut apprécier les invariants cognitifs autour desquels elles se construisent, invariants dont l'indépendance des notations algébriques et géométriques, indépendance relative et acquise dans l'histoire, mais typique des mathématiques, est un des éléments fondamentaux.

Giuseppe LONGO
LIENS (CNRS)
Dept. de Mathématiques et Informatique,
Ecole Normale Supérieure,
45 Rue d'Ulm, 75005 Paris.

Bibliographie

[1] Connes A. *in* J.-P.Changeux, A. Connes (1989) *Matière à Pensée*, Odile Jacob.

[2] Feferman S., S. Sieg, S. Simpson (1988) trois articles dédiés aux réalisations partielles du programme d'Hilbert, *Journal of Symbolic Logic*, 53, 2.

[3] Gödel K. (1944) "Russell's mathematical logic" *in* (Schlipp ed.), *The philosophy of B. Russell*, Chicago, Evanston.

[4] Hilbert D. (1967)"The foundation of Mathematics" *in From Frege to Gödel*, Van Heijenoort (ed.), Cambridge, Mass, Harvard U.P.

[5] von Neumann J. (1983) "The formalist foundations of Mathematics" *in* Benacerraf & Putnam (eds), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge, Cambridge U.P.

[6] Petitot J. (1990) "Logique Transcendantale : synthétique a priori et herméneutique mathématique" *Fundamenta Scientiae* 10,1.

[7] Thom R. (1990) *Apologie du Logos*, Paris.