Intellectica, 2002/2, 35, pp. 131-161

Laplace, Turing et la géométrie impossible du " jeu de l'imitation " : aléas, déterminisme et programmes dans le test de Turing[1]

Giuseppe Longo[*]

Résumé : le jeu de l'imitation entre homme et machine, proposé par Turing en 1950, du point de vue physico-mathématique est un jeu entre une machine "discrète" et un système "continu". Turing souligne à plusieurs reprise la nature laplacienne de sa machine à états discrets et essaye, toutefois, de lui faire imiter au mieux le comportement d'un système qui, selon ses propres mots, n'est pas à états discrets : le cerveau. En comparant cette tentative d'imitation avec son travail de modélisation de 1952 (une analyse mathématique de la morphogenèse comme dynamique continue et sensible aux conditions aux contours), ainsi qu'avec des acquis récents dans la théorie des systèmes dynamiques, on démontre la distinguabilité d'une machine à état discret par rapport à de nombreux processus physiques, un tant soit peu complexes. On développe à partir de là l'importante distinction, suggérée par Turing, entre imitation et modélisation ainsi qu'une analyse de la répétabilité des processus computationnels. Les références sont de type physique et mathématique, mais l'analyse est purement conceptuelle.

Mots clé : Machine de Turing, déterminisme classique, systèmes dynamiques, hypothèses computationnelle et dynamique, analyses fonctionnalistes de la cognition, itération obsessive, Laplace aujourd'hui.

Abstract: **Laplace, Turing and the "imitation game" impossible geometry: randomness, determinism and programs in Turing's test**. From the physico-mathematical viewpoint, the imitation game between a man and a machine, proposed by Turing in 1950, is a game between a discrete and a continuous system. Turing stresses several times the laplacian nature of his discrete-state machine, yet he tries to show the undetectability of a functional imitation, by his machine, of a system (the brain) that, in his words, is not a discrete-state machine, as it is sensitive to limit conditions. We shortly compare this tentative imitation with Turing's mathematical modeling of morphogenesis (his 1952 paper, focusing on

---

[1] Cet article est basé sur le texte d'une conférence invitée au Colloque **Cognition, meaning and complexity**, Roma, June 2002 (English version downloadable from the author's web page).

[*] CNRS et Dépt. d'Informatique. École Normale Supérieure, Paris et CREA, École Polytechnique http://www.di.ens.fr/users/longo

continuous systems which are sensitive to initial conditions). On the grounds of recent advances about dynamical systems, we show the detectability of a Turing Machine in many dynamical processes. Turing's hinted distinction between imitation and modeling is developed, as well as a discussion on the repeatability of computational processes. Most references are physico-mathematical in nature, but the analysis is purely conceptual.

Keywords: Turing Machine, classical determinism, dynamical systems, computational and dynamical hypotheses, functional analyses of cognition, obsessive iteration, Laplace today.

INTRODUCTION

Dans un article de 1950, devenu justement célèbre, Alan Turing propose, en vue d'opérer une comparaison fonctionnelle entre cerveau et machine, un jeu qu'il appelle "jeu de l'imitation". Ce texte est, à bien des égards, aussi fondateur que ses autres articles, mais dans un champ entièrement différent puisqu'il s'agit cette fois d'un article de *philosophie de la connaissance*. Cette réflexion philosophique sépare en deux la trajectoire intellectuelle de Turing (Lassègue, 1998) : le premier moment de cette trajectoire est consacré à la modélisation de l'acte exécuté par la pensée calculante, le "Human Computer" au moyen de la machine que la tradition a nommée du nom même de Turing[2] ; le deuxième moment est consacré à l'analyse, à partir de 1950, des potentialités morphogénétiques des phénomènes de diffusion chimique (Turing, 1952). Dès son premier article de 1936, Turing avait ainsi décrit sa machine à calculer/déduire qui est une machine à états discrets, comme il le rappelle lui-même fort justement : une tête d'écriture/lecture bouge à droite ou à gauche, écrit 1 ou 0 sur un ruban, les efface. Idée fondamentale : la machine est constituée par un *software* (logiciel : les instructions) et un *hardware* (matériel : la tête d'écriture/lecture et le ruban). Cette distinction, purement conceptuelle à l'époque, est le vrai début de l'informatique moderne (vous y reconnaîtrez votre Macintosh). Cette machine abstraite peut *tout calculer*, voilà le résultat extraordinaire des années '36-37.

En fait, Turing lui-même, Kleene et quelques autres pionniers démontrent que tous les formalismes pour la calculabilité, à partir des travaux de Herbrand et Gödel ('30-'31), sont équivalents à la machine de Turing : en passant par le lambda-calcul (Church '32 ; voir (Barendregt, 1984)), ils traduisent les processus de calcul arithmétique les uns dans les autres. Par conséquent, tous les systèmes calculent la même classe de fonctions sur les nombres entiers. « Nous avons un absolu », s'exclame-t-on à l'époque (voir le

[2] Le terme « machine de Turing » est dû à A. Church, review de [Turing, 1936] dans Journal of Symbolic Logic, 2, 42-43, 1937. L'expression employée par Turing pour désigner sa machine est « logical computing machine » (LCM).

commentaire de Gödel fait en 1963 sur la réédition de son article de 1931, repris dans (Gödel et al., 1989)) : cet absolu est la classe des fonctions (partielles) calculables, des entiers dans les entiers, en tant que lieu de tout ce qui est effectif, calculable, en fait pensable («... les lois de l'arithmétique gouvernent tout ce qui est dénombrable. Celui-ci est le plus vaste de tous les domaines, puisque lui appartiennent non seulement l'actuel et l'intuitif, mais tout ce qui est pensable.» (Frege, 1884)). Le lambda-calcul, ses types, leurs catégories sémantiques sont des structures syntactiques et mathématiques richissimes (voir (Hindley, Seldin, 1986), (Girard et al., 1990), (Krivine, 1990), (Asperti, Longo, 1991), (Amadio, Curien, 1998) : elles sont encore au cœur de la logique et de l'informatique théorique contemporaine, quoique d'autres problèmes se présentent aujourd'hui. Ces formalismes ont été en effet l'aboutissement d'un parcours conceptuel et mathématique remarquable, conduisant à la notion de système et de langage logico-formel, un pilier des mathématiques du XXe siècle. En fait, un projet de fondements des mathématiques et de la connaissance humaine.

Parmi les pionniers de ce "tournant linguistique-formaliste", il faut compter les mathématiciens Peano et Padoa : pour eux, la certitude mathématique, en fait la certitude de la pensée et donc la pensée elle-même, se situerait dans le "potentiellement mécanisable". Il fallait ainsi, avant toute chose, réduire les mathématiques à un calcul formel, un calcul numérique qu'une machine puisse complètement reproduire (d'où la démarche préliminaire : encoder les mathématiques dans l'Arithmétique de Peano). Mais de quelle machine s'agit-il ? C'est également chez Hilbert qu'on en trouve une première intuition ; il fait reférence à des "suites finies de signes, élaborées selon un nombre fini de règles", ou des "lois de la déduction formelle", elles aussi écrites sous la forme de suites finies de signes, et donc sous la forme de nombres entiers (et Hilbert sait de quoi il parle, puisqu'il encode par voie analytique, dans son livre de 1899, toutes les géométries, euclidiennes et non-euclidiennes, dans l'Arithmétique). Dans les années '30 – '36, on formalise enfin l'intuition de ces grands pionniers et, modulo une idée remarquable, la gödelisation[3], étendue à un codage arithmétique de tout ce qui est fini, la machine de Turing prend la place des automates de Vaucanson et Diderot : potentiellement, elle est apte à simuler toute fonction humaine, la pensée en particulier (ou tout d'abord), (Gandy, 1988).

[3] Point technique crucial de la preuve de Gödel, 1931 : le codage de la métathéorie formelle-déductive de l'Arithmétique *dans* l'Arithmétique elle-même (voir [Gödel et al., 1989]).

1. LE JEU, LA MACHINE ET LE CONTINU

En 1950, Turing a le courage de soumettre le programme de Peano et Padoa à une sorte d'expérience scientifique-mentale : démontrer qu'une machine à états discrets, une MED (sa machine universelle), est indistinguable d'un cerveau humain, ou, du moins, qu'elle peut jouer et gagner ce qu'il appelle le "jeu de l'imitation", en jouant contre un homme (ou, plutôt, une femme ?). Dans ce texte, nous ne discuterons pas la question spécifique posée dans ce jeu entre un homme, une femme et une machine, mais son interprétation générale et dominante : en tant que preuve prétendue d'une "équivalence fonctionnelle" entre machine digitale et cerveau humain. Et on en parlera dans un cadre purement physico-mathématique.

La preuve de Turing est prudente : elle se base sur des hypothèses mathématiques bien explicitées, comme l'on verra. On notera également une différence capitale avec les chantres modernes du "tout est un programme", le "tout" en question étant remplacé selon les auteurs par l'évolution, le génome, le cerveau, etc. (en fait, dans ce slogan, aucune hypothèse n'est formulée, il s'agit seulement d'une *description* du "réel", de l'Univers, lui-même identifié à une Machine à Etats Discrets). Turing est au contraire conscient des hypothèses fortes qui sont nécessaires à son raisonnement. La conclusion aussi est très prudente. Or, l'hypothèse centrale aussi bien que la conclusion ne sont pas corroborées. Et, aujourd'hui, on peut le prouver car ce grand mathématicien avait bien exhibé hypothèses et conclusions. Voilà l'intérêt de l'article : l'explicitation des prémisses, la richesse des arguments. On jouera donc le jeu de Turing du point de vue mathématique, avec ses hypothèses, sans nous engager aucunement dans une discussion de philosophie de l'esprit : ce n'est pas nécessaire pour gagner à coup sûr contre n'importe quelle MED.

Dans une MED, explique Turing, «... il est possible de prédire tous les états futurs. Cela nous rappelle les vues de Laplace.... La prédiction que nous envisageons est, cependant, relativement plus effective que celle que Laplace considère » (page 145, livre Turing-Girard, Seuil, voir les références). En fait, continue-t-il, l'Univers et ses processus sont "sensibles aux conditions initiales", dirions-nous en termes modernes (Turing prend l'exemple suivant : « le moindre déplacement d'un électron d'un milliardième de centimètre peut faire qu'un homme sera tué par une avalanche un an plus tard, ou en réchappera »). Au contraire, et voilà la plus grande effectivité de son approche, « une des propriétés essentielles des... MED est que ce phénomène ne se produit pas. Même quand nous considérons des machines matériellement réelles au lieu des machines idéales...», la prédiction exacte est possible (p. 146).

Donc, pour Turing, aucun doute : *sa machine est une machine laplacienne*. Et il a absolument raison : la notion de programme et la structure mathématique de son implantation sont déterministes dans le sens de Laplace, c'est-à-dire que cette détermination, s'exerçant par un nombre fini de règles (ou équations, pour la mécanique laplacienne), implique la prédictibilité. Bien sûr, il peut y avoir de l'indéterminisme (la machine peut faire des pas qui mènent à un élément arbitraire d'un ensemble fini d'états discrets possibles, au lieu d'un seul – on a alors à faire à une MED indéterministe), mais il s'agit de l'indétermination abstraite de type probabiliste, déjà et si bien étudié par Laplace, et qui n'est pas le même *concept mathématique* que l'imprédictibilité des systèmes dynamiques déterministes, dans le sens moderne dont on parlera longuement plus bas.

Or, Turing comprend bien que « le système nerveux n'est sûrement pas une MED » (ah, si tout le monde était au moins d'accord avec ça !). Et il précise : « une petite erreur dans l'information sur la taille de l'impulsion nerveuse... » (page 162). Encore une fois, et en termes modernes, le cerveau est plutôt un système dynamique (Turing appelle ces systèmes « continus »). Comment comparer alors une MED avec le cerveau ? La comparaison est fonctionnelle et relative au seul accès possible à la machine, au cours du jeu de l'imitation : les suites finies de signes d'un télétype (votre clavier face à l'écran aujourd'hui, ou les clicks de la souris, qui déclenchent un petit programme, suite finie de signes). Dans ces conditions, selon Turing, on ne pourrait pas distinguer un système continu, comme le cerveau, voire «... une plus simple, un analyseur différentiel... », d'une MED ; si la machine continue donne sa réponse par une imprimante, celle-ci sera indistinguable de la réponse d'une MED, même si obtenue par d'autres moyens (la variation continue au lieu des pas discrets). Voilà donc l'hypothèse centrale de Turing : si l'interface avec le système dynamique est donnée par une "grille discrète d'accès", alors on ne pourra pas le distinguer d'une MED.

Et de fait, les MED matérielles d'aujourd'hui, nos ordinateurs, simulent les systèmes dynamiques d'une façon plus que remarquable ! Ils développent des approximations discrètes des équations qui modélisent ces systèmes avec une très grande efficacité : nulle part ailleurs peut-on mieux voir la "forme" d'un attracteur que sur un écran d'une machine assez puissante. Leurs applications à l'aérodynamique (simulation des turbulences), par exemple, ont baissé énormément les coûts des avions (plus besoin, ou presque, de souffleries). Mais, mais... quelle est la différence conceptuelle, mathématique, physique entre les deux notions ?

Évacuons d'abord toute confusion entre modélisation mathématique et imitation, dans le sens de Turing. Prenez l'équation logistique discrète $x_{n+1} = k\, x_n\, (1 - x_n)$, pour $2 \leq k \leq 4$. Maints systèmes physiques (ou même relevant du vivant) sont très bien modélisés par cette fonction : typiquement, lors d'un couplage antagoniste où une action x_n est couplée à une réaction symétrique (1 – x_n). Pour certaines valeurs de k, cette transformation déterministe, bien évidemment, de [0,1] en [0,1], a un comportement chaotique : la moindre variation de x_0 et peut faire radicalement changer l'évolution. Sauf que pour un ensemble dénombrable (ou de mesure nulle) de points initiaux x_0, quand k = 4 et n tend vers l'infini, la suite $\{x_n\}$ est dense dans [0,1] : on dit alors que son comportement est *ergodique* (ou quasi ergodique, car il l'est par rapport à une définition d'ergodicité un peu plus faible que d'habitude). Toutefois, si vous démarrez une deuxième fois votre machine sur *la même valeur numérique* de x_0, vous aurez la même suite : *c'est ça une MED*. Au contraire, dans un système physique (classique), cela n'a pas de sens de dire "démarrer exactement dans la même situation initiale", car *la mesure physique est toujours un intervalle*. Et la dynamique est telle que, justement, une perturbation en dessous de la mesure possible, c'est-à-dire à l'intérieur de l'intervalle, peut faire basculer le système vers des évolutions très différentes.

Bref, les trajectoires, les portraits des attracteurs (leurs structures géométriques), dus à des variations se situant en dessous de la grille discrète de mesure, peuvent être très différents. Or, c'est cela la complexité, du Santa Fé Institute au CenECC de l'ENS : elle se situe dans les bifurcations possibles, dans la richesse des structures géométriques des attracteurs, dans leurs différentes formes de stabilité structurelle, jusqu'aux phénomènes de synchronisation (dans le cerveau d'un épileptique, par exemple) dont ils peuvent être l'origine. L'enjeu est de nature géométrique.

Voici donc une première approximation de la stratégie gagnante, si l'on donne à « l'imitation » - le mot employé par Turing - un sens fort, normalement réservé à la notion de simulation : modèle computationel ou, plus précisément, réalisation computationnelle de la modélisation physico-mathématique. Dans ce cas, un vrai système dynamique physique gagne toujours le jeu de l'imitation contre une MED, car il lui suffit de dire :

> "recommençons dans les mêmes conditions initiales et comparons ensuite l'évolution de nos portraits de phases".

La mesure par intervalles et la sensibilité aux conditions initiales feront la différence entre la MED et le système physique. Si le système est un fleuve turbulent, par exemple, il gagne au premier coup et en quelques instants. Un pendule forcé ou double a juste besoin d'un peu plus de temps. Démarrez, par exemple, votre double pendule[4] et l'ordinateur sur les valeurs, disons, 3 et 7, deux fois de suite : ce dernier utilisera exactement ces valeurs pour la simulation

[4] Une description mathématique d'un pendule forcé se trouve dans [Lighthill, 1986].

numérique, chaque fois. Il obtiendra alors les mêmes arrondis et, sauf des cas tout à fait exceptionnels dont on parlera, il décrira la même trajectoire. Or, il n'est pas question de faire démarrer le pendule physique sur 3 et 7, exactement : on ne pourra que le lancer sur un intervalle, si petit soit-il, autour de ces valeurs. Après un temps suffisamment long, le système physique parcourra une deuxième trajectoire différente, voire très différente, de la première dans son espace des phases (la structure engendrée par toutes les positions et vitesses compatibles avec les données du système). "More geometrico" donc, un système continu montre l'imprédictibilité de son évolution par rapport à une MED, même pour un observateur du "tournant linguistique", qui ne jure que par un télétype, car aucune grille discrète de lecture, si fine soit-elle, ne permet de stabiliser un système à la dynamique instable.

Pour le moment, nous avons seulement appliqué la remarque de Turing concernant la sensibilité des systèmes dynamiques aux conditions initiales, qui est à l'origine de l'imprédictibilité, et son observation selon laquelle « une des propriétés essentielles des... MED est que ce phénomène ne se produit pas ». Bien évidemment, cette stratégie de jeu est seulement une première réponse mathématique à ce qui a été appelé, bien au-delà de la pensée de Turing, le "test de Turing" et aux mythes de la machine comme modèle du cerveau ; il s'agit d'une réponse dans le cadre des hypothèses mathématiques de Turing, qui définit à plusieurs reprises le cerveau comme étant "un système continu" et sa MED comme une "machine laplacienne".

Avant d'affiner la stratégie de jeu et de discuter de près la question de l'imitation fonctionnelle, résumons brièvement les termes de cette première confrontation entre la machine et un système physique. Nous avons donc supposé, en première approximation, que la machine essaye de simuler au mieux un système dynamique, en utilisant un modèle mathématique conçu sur la base de sa nature déterministe (décrite donc par un nombre fini d'équations, voire de règles formelles de déduction pour un logiciste qui veut modéliser la pensée[5]). Au premier tour, il peut être impossible de distinguer entre l'évolution de la MED et celle du système physique, dont un télétype ou les pixels d'un écran nous donnent des mesures numériques : bien évidemment, les deux évolutions seront en général différentes, mais aucune n'est plus réaliste que l'autre (en physique, du moins). Toutefois, l'itération de

[5] Un système est déterministe, si nous savons (ou pensons pouvoir) écrire un nombre fini d'équation ou de règles d'inférence qui en déterminent l'évolution. En physique classique, le déterminisme est inhérent à la construction de l'objectivité scientifique : la possibilité de "déterminer" un système par un nombre fini d'équations ou de règles est intrinsèque à son approche théorique. Dans ce cadre classique, Poincaré a démontré que le déterminisme équationnel n'implique pas la prédictibilité du système physique. Mais on y reviendra, au cours d'un entracte.

la simulation-modélisation à partir des mêmes conditions initiales dévoile la machine : si une MED redémarre sur les mêmes valeurs numériques, nécessairement discrètes, elle va décrire exactement la même évolution dans l'espace des phases ; par contre, l'instabilité dynamique d'un système physique rendra la deuxième trajectoire différente de la première, après un temps suffisamment long, et, en général (voir §.2 pour plus de détails), même la lecture discrète des mesures physiques mettra en évidence cette différence. En conclusion, une MED n'est sûrement pas un modèle du cerveau, qui est un système continu pour Turing, contrairement à ce qui est plaidé en Intelligence Artificielle classique et par nombreux cognitivistes modernes ; mais, peut-elle l'imiter ? Et que veut dire ce mot, par rapport à modélisation, exactement ? Le jeu de Turing peut aider à clarifier ces concepts importants.

Continuons donc dans notre jeu. Pour contrecarrer cette première esquisse de la stratégie de l'itération que l'on vient de proposer, la machine (le programmeur) pourrait en fait utiliser l'astuce suggérée par une remarque de Turing à la fin de la page 162 : il propose de piéger l'observateur-comparateur d'un système continu et d'une MED en faisant engendrer à la dernière une suite de nombres au hasard. Or, cette astuce est au cœur d'une différence qui montre la profondeur philosophique et mathématique du jeu de l'imitation. Dans la remarque en question, Turing met en évidence cette différence radicale qui nous intéresse, et dont il est conscient (voir §.3 ci-dessous), entre son "jeu de l'imitation" et la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Bien évidemment, en appliquant notre stratégie de l'itération face à une simulation ergodique, on se retrouverait avec 4 trajectoires toutes différentes entre elles et, dans certains cas, toutes aussi réalistes. Mais on a dû renoncer à la simulation proprement dite, en tant que modélisation du système déterministe par un système d'équations ou de règles formelles d'inférence, implantées sur un ordinateur, et l'on est passé à une notion plus faible, celle d'équivalence en tant *qu'indistinguabilité modulo une interface discrète*, sans s'engager sur l'identité des lois de comportement (le programme de la machine n'est pas censé implémenter les mêmes lois qui "déterminent" le système physique). En fait, c'est cela le jeu de l'imitation. Et il nous fait tomber directement sur le grand enjeu de la "simulation" d'un système déterministe par une méthode ergodique : une simulation qui est en fait une *imitation*, pour le dire - comme Turing - d'une façon fort appropriée mais peu commune.

Les précisions que l'on ajoutera dans la prochaine section demandent un peu plus de compétence ou d'attention mathématique :

le lecteur humaniste qui a saisi cette première différence entre MED et système dynamique peut passer directement au §.3[6].

2. ENTRE ALÉAS ET CHAOS DÉTERMINISTE

Deux questions se posent maintenant. La première est tout à fait générale : peut-on distinguer, pratiquement, du point de vue computationnel, l'aléatoire et le déterminisme (chaotique) ? Que se passerait-il si, dans notre jeu, pour piéger l'observateur de la stratégie de l'itération, on acceptait d'abord de simuler le système dynamique (en développant les calculs d'un modèle équationnel), puis qu'au deuxième tour, l'ordinateur ajoute des petites corrections aléatoires dans les données initiales ou à chaque pas de l'évolution discrète ?

Deux phases donc. Dans la première (jeu à un seul tour), on observe un système physique, dont on connaît des mesures discrètes par le biais d'un télétype (ou des pixels d'un écran), et un ordinateur qui engendre une trajectoire aléatoire. Or, il existe des systèmes déterministes, maximalement instables, tels qu'aucune méthode connue ne nous permette de distinguer entre leurs évolutions, reproduite sur un écran, et l'engendrement d'une suite au hasard : il s'agit des "systèmes de Bernoulli"[7]. Pour ces systèmes, la connaissance du passé ne permet pas de déterminer l'évolution future ; on dit alors que le flot est aléatoire. Les tirages du Loto ou des dés en sont des exemples typiques : ces systèmes sont déterministes, mais parfaitement chaotiques. Dans ces deux cas, le nombre des paramètres et des équations en jeu peut être très grand, quoique fini, et la sensibilité aux conditions initiales est telle qu'il ne vaut absolument pas la peine d'essayer d'écrire ces équations : on préfère analyser le phénomène en termes de lois de probabilité (des lois "à la limite", pour des "grands nombres"). Par contre, il existe des systèmes de Bernoulli très simples, décrit par une ou deux équations. C'est grâce à ces systèmes que l'on programme sur un ordinateur

---

[6] Ce lecteur, pendant que les autres lisent le §.2, pourrait consulter la page http://www.cse.ucsc.edu/~charlie/ 3body/ pour une dizaine d'exemples extraordinaires d'itération mécanique d'orbites parfaitement régulières, pour 3, 6,... 19, 99 corps (des 8 croisés, des fleurs fantastiques... absolument pas de chaos). Une fois trouvées les conditions initiales exactes qui engendrent ces orbites périodiques, grâce à des mathématiques très difficiles, la machine, à chaque click de l'observateur, redémarre exactement avec les mêmes trajectoires, aussi parfaites qu'irréelles. Irréelles, car ces orbites sont critiques : le champ gravitationnel d'une petite comète à 10 milliards de kilomètres ferait basculer ces "planètes" loin de leurs trajectoires périodiques. Certaines de ces images suscitent le rire (et l'admiration pour les mathématiciens qui y ont travaillé), tellement elles sont physiquement absurdes : même en physique, le sens de l'humour peut nous aider à distinguer le monde réel de la réalité virtuelle.

[7] Pour une introduction au déterminisme des systèmes chaotique, voir [Dahan et al., 1992]. Pour une technicité croissante, voir [Lighthill, 1986], [Devaney, 1989].

l'engendrement de suites aléatoires : des techniques basées sur des simples propriétés trigonométriques et la multiplication d'angles autour du 0, par exemple, donnent des suites aléatoires de signes + et -. De même, l'équation logistique du §.1, pour k = 4, engendre, et de façon très économique et déterministe, des suites dont la "géométrie globale" est aléatoire[8].

INTERMEZZO I (déterminisme et connaissance)

La question à laquelle nous amène Turing devient en fait très délicate et intéressante : on ne connaît pas de systèmes "proprement aléatoires", en physique classique. Plus précisément, dans le discret, nous avons un excellent *concept*, voire une *définition mathématique*, de suite aléatoire (Kolmogorov, Martin-Löf, Chaitin : « le programme le plus court qui l'engendre est la suite elle-même » ou... "wait and see"), mais tous les exemples de suites aléatoires naturelles ou artificielles, que nous connaissons, proviennent d'un système déterministe physique (chaotique) ou d'un programme pour ordinateur bien déterministe, en fait, laplacien. Ces programmes, écrits en deux lignes, engendrent des suites aléatoires très longues : en tant que produites par une MED, Turing considérerait ces suites comme prédictibles[9].

Dans une note on a déjà observé que le déterminisme est essentiel à la construction de l'objectivité en physique classique (le déterminisme est "objectif") ; on peut maintenant ajouter que l'aléatoire classique est *épistémique* (il est une histoire de "regard" et de connaissance, il n'est pas inhérent à la construction théorique : même un gaz obéit à des lois déterministes d'interaction locale entre particules). En un mot, l'aléatoire classique que nous connaissons, n'est que du déterminisme fortement instable *ou* à l'apparence instable (l'ordinateur qui calcule la suite logistique ergodique, pour x_0 fixé, reste, très bêtement et pour toujours, sur une trajectoire critique, mais dense dans l'espace des phases - voilà le chaos purement épistémique) *ou* avec un très grand nombre, quoique fini,

[8] Dans ces deux derniers cas d'ergodicité programmable, c'est la *connaissance globale* du passé qui ne dit rien sur le futur (les suites sont globalement aléatoires – elles peuvent se concentrer longtemps près de certaines valeurs, changer soudainement de zone d'attraction, faire basculer très loin un groupe de valeurs), mais, *localement*, on connaît parfaitement le prochain pas – on a décrit explicitement (programmé) la lois de détermination, contrairement aux dés et au Loto. C'est la géométrie commune des trajectoires qui permet d'appeler ergodiques toutes ces suites, physiques ou programmables.

[9] En fait, ces suites, appelées pseudo-random, sont périodiques, car engendrées par des fonctions f avec $x_{n+1} = f(x_n)$: sur une MED concrète la longueur finie de la représentation décimale oblige à revenir, tôt ou tard, sur le même nombre, donc sur la même sous-suite. Or, la périodicité est le contraire de l'aléatoire, mais … la période peut demander *beaucoup* de temps.

de paramètres (les dés, un gaz), ces '*ou'* n'étant pas exclusifs. Encore une fois, les suites engendrées par la fonction logistique ou par un jeu de dés, des flots de Bernoulli, sont déterministes et ergodiques. Toutefois, il y a une grande différence dans le nombre des lois et de degrés de liberté qui les déterminent et de plus, dans l'équation logistique, une fois donné x_n, on calcule et détermine parfaitement le x_{n+1}, contrairement aux dés dont un tirage ne détermine en rien le suivant (voir la note précédente). En ce sens, leur ergodicité commune est épistémique, car, d'une part, l'observateur écrit les équations (l'équation logistique) ou connaît les lois d'évolution pertinentes (les dés) et, d'autre part, il observe une totale absence de régularité dans les deux évolutions. L'irrégularité est totale du point de vue du *regard* porté sur la géométrie des attracteurs qui, s'ils existent, sont similaires : la suite logistique, tout comme la suite des tirages des dés, saute d'un bout à l'autre des valeurs possibles, sans aucun ordre visible. Par des modalités différentes, le déterminisme objectif ou de principe engendre le chaos épistémique et l'imprédictibilité phénoménale qui lui est associée.

Mais Dieu, être parfait et infini qui maîtrise toutes les lois de l'univers et mesure sans approximation, sans intervalles, connaît parfaitement l'évolution des jeux des dés et du Loto – et de l'Univers, comme dit Laplace fort justement, dans une page très connue et souvent mal interprétée. Par ces mots, Laplace ne fait que donner la bonne définition *absolue* de la notion de système déterministe, en dehors de toute construction de connaissance et d'objectivité scientifique, basée sur des hypothèses fortes et bien explicitées sur Dieu : et, de ce point de vue, il a raison. En physique classique, nous écrivons les mêmes équations que Dieu, dès que nous en sommes capables, avait déjà observé Galilée. Mais nous, les hommes (et les femmes), nous avons quelques problèmes de mesure physique et un regard différent du sien sur la géométrie des trajectoires déterminées par ces équations ; et tout cela devient très important pour les systèmes dynamiques, car ils peuvent être sensibles aux conditions initiales et, par conséquent, à des perturbations en dessous de l'intervalle de mesure possible, nous a expliqué Poincaré. Bref, la conjecture erronée de Laplace est ailleurs et elle consiste dans l'hypothèse centrale à l'origine du "calcul des perturbations" auquel il a grandement contribué : *à petites perturbations, petites conséquences*. Le déterminisme impliquerait donc la prédictibilité, modulo l'approximation inévitable de la mesure physique, dont il est bien conscient. L'invalidation de cette conjecture par Poincaré nous fera ensuite comprendre l'aléatoire classique comme cas particulier du chaos déterministe. Et tout cela est très important pour saisir la tentative de Turing d'imiter, non pas de modéliser, un système continu classique par une MED laplacienne.

À présent, si l'on veut de l'aléatoire non-déterministe, on ne peut que recourir à la physique quantique, en dehors donc de notre jeu bien classique : l'indéterminisme alors, du moins pour l'interprétation à la Heisenberg, n'est pas épistémique, mais devient "essentiel" à la construction de l'objectivité scientifique ; les probabilités sont "intrinsèques" à la théorie et... une aiguille, placée avec soin sur sa pointe, tombe, *classiquement*, sur une valeur ou une autre du tapis vert sur laquelle on l'a appuyée, suite à une fluctuation *quantique* essentiellement aléatoire (Dieu, lui, sait vraiment jouer aux dés, mais seulement en dessous du h de Planck). Voilà l'enjeu qui fait tant de "querelle" : le déterminisme classique *ne connaît pas*, de fait, l'aléatoire propre, mais seulement le plus ou moins chaotique, selon différents modes de détermination. En revanche, pour un courant important de la pensée physique, l'indéterminisme quantique est inhérent à la théorie. Parfois, ce dernier se montre à notre regard classique, sur la pointe d'une aiguille.

Reprenons maintenant la première phase de notre jeu (jeu à un seul tour) : sans l'aide de Dieu, on ne pourrait donc pas distinguer un système physique de Bernoulli d'une imitation ergodique par la machine. Toutefois, il existe un continuum de systèmes dynamiques classiques qui vont des systèmes stables jusqu'aux flots de Bernoulli : dans les situations intermédiaires, on peut prédire le futur à plus ou moins long terme et, en particulier, le passé a une plus ou moins grande influence globale sur les trajectoires futures. Or, il existe des mesures, dont certaines sont basées sur la notion d'entropie (topologique, voir (Adler, 1979)), qui permettent de départager le degré d'instabilité des systèmes déterministes : les systèmes à entropie nulle sont prédictibles ; par contre, dans les systèmes à entropie très grande, aucune observable n'est prédictible. Entre les deux, de nombreux systèmes physiques peuvent être analysés d'une façon fine et, dans certains cas, mais il n'y a pas de méthode générale, une partition de l'espace des phases (un recouvrement topologique par des petites cellules) permet de conjecturer la dynamique. Autrement dit, l'observation expérimentale d'une trajectoire discrète permet de proposer une loi déterministe pour l'évolution ; dans ces cas, des trajectoires différentes permettent de deviner des dynamiques différentes (en termes techniques, les partitions admettent des "suites génératrices"). Il suffit donc de proposer un de ces systèmes modérément instables pour qu'un observateur bon mathématicien puisse reconnaître l'imitation aléatoire faite par l'ordinateur. On en parlera encore, plus bas, pour être sûrs que, dans ce cas, la stratégie est effectivement gagnante.

Deuxième phase. Pour contrecarrer cette dernière stratégie aussi bien que celle de l'itération (le jeu à deux tours, §.1), l'ordinateur implémente un modèle équationnel du système physique. Mais, au deuxième tour, pour ne pas tomber dans le piège de l'engendrement d'une évolution identique à la première, il introduit des petites perturbations, au hasard. Ce deuxième tour se base alors sur les calculs d'un nouveau système déterministe, celui qui additionne le premier et un générateur mécanique d'une suite aléatoire. Or, des petites perturbations, dans un système suffisamment instable, peuvent engendrer des grands changements de trajectoires ; si le système admet des suites génératrices *et* si l'on tombe, au deuxième tour, sur deux suites qui permettent de deviner deux dynamiques différentes, la distinction entre le système dynamique physique (ou, au moins, sa modélisation mathématique) et la MED est faite : la suite engendrée par l'ordinateur n'est plus dérivée des équations qui modélisent le système physique, mais d'une variante due à l'ajout d'un générateur de perturbations. Et le mathématicien, qui sait reconstruire les équations à partir des suites génératrices, reconnaît encore une fois la machine formelle. Toutefois, toutefois... même si l'on choisit un système avec le bon niveau d'entropie pour jouer à ce jeu, il n'est pas sûr que l'on tombe sur des suites génératrices et que l'on puisse utiliser l'une des techniques applicables pour reconstruire les dynamiques à partir de ces suites ; la machine alors, par ce mélange astucieux de modélisation et d'imitation ergodique, risque de gagner. Il faudra alors user de la stratégie "dure", celle de la turbulence.

À partir de 1941, Kolmogorov et son école proposent une approche stochastique de la turbulence (voir, au sujet de la turbulence, l'article de M. Farge dans (Dahan et al., 1992)). L'idée de Kolmogorov était que certains systèmes aléatoires servent à la modélisation adéquate des phénomènes turbulents. Cette approche, encore aujourd'hui très étudiée, se base sur une hypothèse forte, l'hypothèse ergodique. Elle suppose, entre autres, l'homogénéité, l'isotropie et l'autosimilarité de l'évolution du système. Faute de mieux, les méthodes ergodiques représentent un outil important pour l'analyse, mais il est de plus en plus évident que, dans certains cas, les hypothèses sur lesquelles elles se basent ne sont pas corroborées et que, au contraire, ce qui compte dans l'étude de la turbulence, c'est exactement le mélange complexe entre des structures relativement stables et des fortes instabilités (non homogénéité, non isotropie...). En général, on ne propose pas de prévisions météorologiques par des méthodes ergodiques ; de même, ces méthodes sont fortement déconseillées dans la modélisation des turbulences engendrées par une aile d'avion : ce serait comme confier au loto la conception et la sûreté des structures de vol. En physique mathématique et en informatique, normalement et dès que possible, on modélise, c'est-à-dire on propose et l'on programme des lois déterministes qui reproduisent au mieux le phénomène naturel en question. La distinction turingienne entre imitation et modélisation devient alors cruciale : imitation stochastique vs. modélisation, par les équations de Navier-Stokes, dans notre cas (voir (Cannone, 2003) pour ces équations classiques, aujourd'hui).

Or, l'hypothèse ergodique est invalidée par la présence d'invariants du mouvement, sorte de structures cohérentes, par exemple des tourbillons, où la rotation l'emporte sur la déformation et qui restent stables bien au-delà de ce que toute théorie statistique pourrait prévoir. R. Thom considère souvent dans son œuvre ces structures où, malgré une dynamique fortement instable, il y a un certain maintien de formes géométriques (stabilité structurelle) ; cela n'empêche que – pour le dire comme Prigogine - ce jeu entre structures localement stables et système global, dont les équations déterminent l'éventail des régimes possibles, soit basé sur des petites fluctuations qui, amplifiées, induisent le choix d'un de ces régimes[10].

Donc, d'une part, grâce à la géométrie bien particulière des zones de stabilité et des fluctuations, on sait aujourd'hui que l'ergodicité pure ne peut pas piéger l'observateur expert (selon M. Farge, Kolmogorov avait compris dès 1949 les insuffisances théoriques de l'hypothèse ergodique). De l'autre, on a déjà observé que la modélisation pure était battue par l'itération dans le jeu de l'imitation entre la machine et tout système physique dynamique (même turbulent). Et enfin, si le programmeur mélange les deux stratégies (modélisation + ergodicité) pour jouer un deuxième tour contre un système turbulent bien choisi, les structures cohérentes, les invariants

[10] Les points de vue de Thom et de Prigogine ont énormément enrichi nos connaissances et, malgré des différences importantes, sont mathématiquement et physiquement compatibles: l'analyse dans [Petitot, 1990] le montre très bien. Malheureusement, le piège du platonisme ontologisant fait naître des querelles sans issue, car il mène à confondre la construction mathématique d'objectivité scientifique qui se *constitue* entre nous et le monde, avec des ontologies préexistantes. Une objectivité constituée entre nous et ce réel qui canalise et fait friction sur nos propositions organisatives, des propositions qui ne sont point arbitraires car elles sont le résultat de notre action dans ce monde et elles sont enracinées sur nos pratiques et structures cognitives ([Longo, 2002a et b]). En effet, les *concepts* mathématiques requièrent un *concepteur* qui les dessine sur le voile phénoménal, autour des régularités qui s'imposent à sa structure cognitive (celles qu'il "arrive à voir") ; l'explicitation mathématique de ces régularités fait partie du processus même de la construction de connaissance et d'objectivité mathématique. Pour le dire dans une terminologie husserlienne, le platonisme réduit et confond constitution transcendantale et transcendance. Que de dégâts a fait cette réaction compréhensible de nombreux grands mathématiciens (Gödel, Thom, Connes …) à la pauvreté conceptuelle des philosophies formalistes (celles des fondements dans des calculs logiques dénoués de sens, voir le prochain entracte). Par exemple, dans la querelle sur le déterminisme, on arrive jusqu'à un départage dualiste qui donne un statut ontologique différent à la fluctuation, cause *matérielle*, par rapport à la structure mathématique globale (les équations d'une dynamique), cause *efficiente* ou *formelle*, dans la terminologie aristotélicienne si chère à Thom. Cette dernière serait l'en-soi ou l'idée platonicienne et précéderait l'apparaître phénoménal [Petitot, 1990]. La revitalisation de l'analyse causale fine d'Aristote est très intéressante (mais il ne faudrait pas oublier la "cause *finale*", voir [Stewart, 2002]) ; il n'y a, toutefois, aucun besoin d'une distinction ontologique (platonicienne) parmi ces quatre causes différentes. Au contraire, leur unité et simultanéité temporelle et conceptuelle, dans les phénomènes physiques et biologiques, avec leur "téléonomie", est le défi scientifique d'aujourd'hui.

du mouvement, peuvent être brisés d'une façon non-naturelle et permettent de distinguer la machine : voilà notre thèse, basée sur notre longue expérience de méthodes numériques, aux éléments finis, pour la solution d'équations différentielles. En fait, si l'on fixe des équations pour la turbulence (Navier-Stokes, typiquement, mais on commence à en proposer d'autres) et qu'on les implémente sur une machine, l'ajout de perturbations aléatoires au cours du calcul ne permet pas de choisir *a priori* (de programmer) les conséquences de la perturbation. Autrement dit, la perturbation d'un pas du calcul numérique peut, à certains instants, ne pas se limiter à modifier des écoulements résiduels incohérents (des filaments de vorticité, par exemple) ni à rediriger le régime vers d'autres possibles : cette perturbation *peut briser des structures qui ont toutes les caractéristiques macroscopiques de la cohérence* et d'une longue stabilité. Bref, un caillou qu'on lance dans un tourbillon ça se voit, en tant qu'étranger à la turbulence ; plus encore s'il détruit le tourbillon au-delà du physiquement (géométriquement) plausible. Et le monde physique gagne encore contre la réalité virtuelle.

Nous espérons avoir ainsi répondu à la remarque de Turing qui propose d'imiter un système continu par un système aléatoire discret. En fait, nous l'avons reprise dans un sens fort, dont Turing ne parle pas explicitement : la possibilité d'un mélange de stratégies, la modélisation et l'imitation ergodique. Bien évidemment, nous n'avons pas répondu à l'autre grande question qui tracasse Turing : quelle est la différence entre un homme et une femme ? Comment les distinguer si l'homme essaie d'imiter la femme ? Et que se passe-t-il quand une machine prend la place de l'homme dans ce jeu ? Peut-on saisir la différence par le biais d'un télétype, sans se voir, sans se toucher ? (Quelle limitation de notre humanité matérielle, visuelle et caressante, mais c'est ça le tournant linguistique[11] !)

3. MACHINES LOGIQUES, PHYSIQUES ET BIOLOGIQUES

Selon nous, Turing est parfaitement conscient de la différence entre imitation et modélisation mathématique pour une raison bien simple : il est déjà en train de travailler à un remarquable *modèle mathématique* de la morphogenèse dans un champ de diffusion chimique (un article fondamental, un des points de départ, avec les travaux de D'Arcy Thompson, des analyses modernes de la morphogenèse). En fait, la propriété la plus intéressante des équations dans (Turing, 1952) est qu'une variation infime des

---

[11] « [The game] is played with three people, a man (A), a woman (B), and an interrogator (C) who may be of either sex. The interrogator stays in a room apart from the other two. The object of the game for the interrogator is to determine which of the two is the man and which is the woman.... We now ask the question, "What will happen when a machine takes the part of A in this game?" Will the interrogator decide wrongly as often when the game is played like this as he does when the game is played between a man and a woman? These questions replace our original 'Can machines think?' » (Turing, 1950).

conditions aux limites, dans un système continu bien évidemment, peut changer radicalement l'évolution du modèle. Et cette propriété n'est pas le non-déterminisme ou hasard laplacien, mais la sensibilité aux conditions aux contours et se situe au cœur du modèle déterministe de la morphogenèse à la Turing. Une chose est donc le "jeu de l'imitation", une autre la modélisation mathématique des phénomènes physiques et physico-chimiques ou biologiques : la MED turingienne ne prétend pas modéliser le cerveau, dans le sens physico-mathématique – ce dernier est un système continu pour Turing –, elle peut seulement essayer de tromper un observateur (c'est pourquoi certains font remonter, sans doute avec raison, l'Intelligence Artificielle classique à cet article de Turing). Dans le §.2 on a vu que même l'imitation peut être décelée : on ne peut pas, en général, imiter de façon indistinguable, ou même satisfaisante, par voie ergodique un système dynamique, en particulier s'il est un peu turbulent, mais pas trop.

Deuxième nuance importante à analyser dans les hypothèses de Turing. Il remarque page 146: «Même quand nous considérons des machines matériellement réelles au lieu des machines idéales...», elles restent des machines laplaciennes, comme toute MED. Vrai et faux : vrai, l'ordinateur (séquentiel) réel, en tant que réalisation d'une MED, est condamné par principe à faire toujours le même calcul, à partir de la même base de données discrètes et de programmes, c'est ça son architecture logico-formelle (ses portes logiques et ses programmes, en tant que langages formels). Faux, car il est aussi une machine physique, sujette à des variations en dessous de ses approximations numériques, dues aux petits défauts possibles de ses circuits électroniques, aux rayons cosmiques qui lui tombent sur la tête… C'est extrêmement rare, mais cela arrive. Bien évidemment, il s'agit de sensibilités aux conditions aux contours qui n'ont rien à voir avec celles, intrinsèques, des systèmes continus simulés à l'occasion (et énormément plus rares, donc facile à discerner par voie statistique, en itérant le processus quelque fois).

Tout cela confirme qu'une MED mathématique, telle la Machine de Turing, n'est pas une machine physique, mais une *machine logique,* l'homme dans "l'acte minimal de la pensée" – de la pensée formelle[12]. Par conséquent, son expressivité est mécanique mais purement logico-formelle : elle est, par exemple, indépendante des dimensions spatiales – du ruban, de la tête d'écriture –, une propriété absolument étrangère aux processus physiques, qui dépendent, et fortement, des dimensions de l'espace. Toutefois, quand on réalise physiquement une MED, elle pose des problèmes physiques originaux – des rayons cosmiques à la synchronisation, parfois même relativiste, des systèmes distribués dans l'espace tels qu'ils sont étudiés aujourd'hui. Laissons tomber la comparaison des MED formelles avec les machines du vivant, qui sont physiques, bien évidemment, mais sujettes de surcroît à des phénomènes d'intégration-régulation qui les conservent dans un "état critique étendu[13]" ; cet état est inconnu pour le non-vivant et ses mathématiques, des mathématiques qu'il faut donc faire croître et adapter à la nouvelle besogne (les systèmes dynamiques sont "seulement" une des meilleures approximations que l'on ait, pour le moment). C'est justement cette intégration du cerveau dans un corps, leur régulation réciproque et l'interaction avec un environnement richissime qui donne au cerveau une stabilité structurelle et fonctionnelle bien particulière ; et quand ces liens de

---

[12] « A man provided with paper, pencil, and rubber, and subject to a *strict discipline*, is in effect a universal machine »... « LCMs (*logical computing machines*, voir note 2) can do anything that could be described as "rule of thumb" or "purely mechanical" » [Turing, 1948]. Et Wittgenstein enchaîne : « Turing's "Machines". These machines are *humans* who calculate. » [Wittgenstein, 1980 ; 1096]. "No insight or ingenuity on the part of the human being carrying out the computation" : la LCM est la décomposition de la pensée formelle dans le geste mécanique le plus simple, mais en tant *qu'abstraction humaine*, sur une séquence finie de signes sans signification, hors du monde.

[13] Turing fait référence au cerveau en tant que, au moins, système physique dynamique. Pour rester dans son image, prenez un système turbulent à la fois très stable et très instable, très ordonné et très désordonné ; insérez-le en sandwich entre différents niveaux d'organisation qui le régulent et qu'il intègre. Vous aurez alors une *très pâle image physique* d'un objet biologique. Parmi ces objets, bien matériels, sans âme ni logiciel distincts du matériel (le dualisme moderne du cognitivisme de la règle formelle et du programme), vous trouverez aussi des corps avec des systèmes nerveux qui les intègrent et les régulent (en tant que réseaux d'échange et communication), dans lesquels ils s'intègrent (en tant qu'organes) et par lesquels ils sont régulés (par des cascades hormonales, par exemple). Ces systèmes organisent l'action du corps en le gardant dans un état physiquement *critique*, mais *étendu* (il subsiste dans le temps et dans des rails relativement larges, voir [Bailly,1991]) ; dans les limites de cet état, on trouve à la fois stabilité et instabilité, variance et invariance, intégration et différenciation, voir [Bailly, Longo, 2003b]. Et tout cela dans un écosystème dynamique et dans l'histoire changeante d'une communauté de corps-cerveaux qui interagissent par le geste et le langage (des niveaux d'organisation ultérieurs, externes à l'objet biologique, cette fois).

régulation/intégration par/de/dans un corps s'affaiblissent – au cours du rêve par exemple – le cerveau paraît fort peu stable (de même en cas de grave déprivation – artificielle, par exemple - des sensations). C'est la stabilité dans le changement (homéorhésis), ancrée dans l'auto-organisation propre au vivant qui paraît extraordinairement apte à constituer des invariants, à partir des invariants/stabilités de l'action jusqu'aux invariants cognitifs, voire conceptuels (au cœur de la pensée). Bref, quoique nous non plus nous ne fassions jamais la “même chose”, au sens d'une MED, nous stabilisons des instabilités et des états critiques d'une façon encore très mal comprise, du point de vue mathématique. Certains préfèrent alors troquer le cerveau contre une MED … alors qu'il s'agit d'un système dynamique énormément plus complexe que n'importe quel système physique à n-corps ou fleuve turbulent (pensez au fait que les rives “régulent” un fleuve et que les équations de Navier-Stokes nous disent très peu sur les turbulences près des bords ; et ce n'est rien par rapport à complexité de la friction d'un cerveau à son environnement, en passant par ses interactions avec les différents niveaux d'organisation du corps auquel il appartient)[14].

INTERMEZZO II (machines et déductions)

Inter II.1 : Il faut reprendre les théorèmes d'équivalence de Turing-Kleene et al. de ‘36-37 (voir l'introduction) le deuxième grand résultat négatif pour les formalismes logiques, après le grand théorème d'incomplétude de Gödel, 1931. Que tout système formel déductif, avec une notion de preuve décidable (donc tout système hilbertien), puisse être complètement simulé par une machine qui fait “droite, gauche, écrit/efface 0, 1”, est une vraie catastrophe : quelle pauvreté ces systèmes ! (La difficulté est cachée dans la monstruosité du codage). Cette pauvreté conceptuelle était claire pour Poincaré : « MM. Hilbert et Peano pensent que les mathématiques sont comme la machine à saucisses de Chicago : on y introduit des porcs et des axiomes, ils en sortent des théorèmes et des saucisses» (voilà les mathématiques réduites à la « manipulation de signes concrets » dont parlent encore aujourd'hui certains philosophes, la logique conçue comme « purement formelle » et les mathématiques – énorme tautologie logico-analytique – prêtes à être entièrement engendrées

[14] Soit dit entre nous, la stratégie gagnante proposée plus haut pour un système dynamique s'applique aussi à un homme (ou une femme) : posez mille questions qui demandent quelques lignes de réponse chacune, à l'humain et à la machine, via un télétype comme veut Turing. Posez les mêmes questions le lendemain : vous n'aurez pas les mêmes réponses par l'humain, juste une continuité de sens. Dans ce cas, la génération mécanique de variantes des réponses au hasard est plus une tentative d'arnaque qu'une contre-stratégie mathématique, comme celles dont on parle ci-dessus, car il y a la ‘vexed question’ du *sens* ainsi que la stabilité identitaire *dynamique* de l'objet biologique, qui montreraient la différence. Mais cela va au-delà des modestes ambitions de cet article : ici on ne parle que de machines digitales et de physique.

par ordinateur). En fait, les MED sont des machines à saucisses généralisées (et absolument formidables, pour leurs tâches propres – mais les machines à saucisses aussi sont bien utiles !). N'oublions pas, toutefois, d'apprécier la partie à moitié pleine du verre : quelle idée que celle de Turing, qui, en inventant la notion de *machine programmable*, arrive à faire calculer toutes les fonctions partielles récursives (une classe énorme de fonctions sur {0, 1}*, les nombres entiers) par un homme/machine qui fait "droite, gauche, écrit/efface 0, 1". Bien évidemment, cette idée, avec sa notion de programme, est le vrai début de l'informatique.

Inter II.2 : Le lambda-calcul typé (Church '40) est le seul système qui fait voir avec équilibre le verre à demi-plein : les déductions formelles, avec toutes leurs limites et leur expressivité, deviennent directement des calculs, sans codage (cette propriété s'appelle "isomorphisme de Curry-Howard", voir (Howard, 1980)). Le "human computer" de Peano, Hilbert et Turing, cette aliénation de la rationalité humaine dans un mécanisme laplacien, au lieu de faire "gauche, droite, 0, 1", applique des règles formelles de base un peu plus complexes – "implication-introduction", "implication-élimination" et quelques autres, par remplacement d'une suite de signes par une autre et par sequence-matching (identification par superposition mécanique de signes sans signification). Avec la récursion, le système est aussi un bon calculateur numérique. Aucun miracle, juste une très élégante représentation constructive des preuves formelles comme programmes, qui a mis ce système au centre des mathématiques – logique et théorie des catégories – pour l'informatique des calculs et des langages séquentiels (voir (Girard et al., 1990), (Asperti, Longo, 1991)). Tout récemment, on a proposé aux cognitivistes de ne plus chercher, dans le cerveau, une Machine de Turing, mais une lambda-machine typée (enfin !) : cette MED, au moins, applique le sequence-matching directement à des règles pour la déduction. Le lambda-calcul, "enfin" … car, si, bien au-delà des objectifs du jeu de l'imitation de Turing, on s'obstine à chercher l'implantation des règles formelles-universelles de la pensée ("the Laws of Thought") dans le cerveau, il faut au moins savoir que le *codage* de ces lois est très important, tout comme sous Unix ou Mac-OS. En fait, le choix du style de programmation (fonctionnel, logique, impératif, orienté objets..., par exemple) et la conception d'un langage avec sa propre méthode de codage-représentation du monde et son expressivité spécifique, sont au cœur de l'informatique, en tant que science, bien difficile et importante, des MED. L'équivalence computationelle proclamée par la "thèse de Church", n'a aucun intérêt en informatique (voir l'introduction à (Aceto et al., 2003)) : une bonne partie du travail consiste justement dans l'explicitation de l'expressivité du langage proposé ou analysé. Or, les termes-programmes du lambda-calcul, contrairement aux Machines de Turing et aux autres formalismes, codent une grande partie de "l'architecture" de la déduction dans les systèmes formels ; et, en général, « la preuve possède une architecture », avait déjà exclamé Poincaré contre Hilbert et ses codages arithmétiques bien plats.

Les limites du lambda-calcul sont celles de tout formalisme computationnel : il procède par remplacement mécanique de suites de signes sans signification et par sequence-matching. Au contraire, nous, quand nous disons "si... alors... autrement...", nous ne faisons pas du sequence-matching : nous déplaçons des montagnes de significations. C'est cela l'incomplétude mathématique des formalismes et le grand enjeu cognitif, moniste, pour la connaissance, au-delà du partage logiciel/matériel/signification, bien commode pour les machines et les modèles fonctionnalistes post-turingiens de l'esprit, situés hors du monde[15].

Revenons une dernière fois à notre jeu, pour réfléchir. Comment est-il possible qu'un grand mathématicien comme Turing ait pu croire qu'une grille discrète d'accès, fixée une fois pour toute (les lettres d'un télétype, les pixels d'un écran), puisse cacher la différence géométrique entre un système dynamique (très complexe, le cerveau) et une mécanique laplacienne ? En fait, jusqu'aux résultats de Kolmogorov-Arnold-Moser et Ruelle des années '60 et '70, la complexité (géométrique !) des systèmes continus n'était pas entièrement claire, en particulier l'idée que les points "critiques" puissent être denses. Mais la philosophie possible existait. On s'explique.

Laplace savait déjà très bien qu'il y a des points critiques : le sommet d'une montagne de potentiel, par exemple. C'est Poincaré qui, grâce à son travail en mécanique céleste, comprendra que le problème est "global", qu'il est propre aux systèmes dynamiques et à leur géométrie et non pas à quelques points isolés. Voilà le sens de sa fameuse remarque sur la sensibilité aux conditions initiales : ces points critiques sont "un peu partout", même s'il n'a pas exactement le théorème qui le démontre. C'est d'autre part cette attention à la complexité physico-mathématique qui lui fait aussi... conjecturer l'incomplétude de la théorie formelle des ensembles, prétendue machine à saucisse universelle pour les mathématiques (indépendance de l'hypothèse du continu, correspondance avec Zermelo ; les théorèmes viendront 34 et 60 ans après). Tout comme Weyl conjecture l'incomplétude de l'Arithmétique dans (Weyl, 1918). En dépit du logicisme, la philosophie de la physique et celle des mathématiques doivent être profondément liées, pour mieux *comprendre* au moins, comme le démontrent Poincaré et Weyl. Bref, il y a ceux qui saisissent la "secrète noirceur du lait" et son importance pour la connaissance et la science et ceux qui voient le monde à travers une MED laplacienne. Turing appartient au premier

[15] L'incomplétude mathématique des formalismes est un thème très proche de ce dont on parle ici, voir [Longo, 1999 et 2002 ; Bailly, Longo, 2003a] pour des analyses basées sur des résultats récents.

groupe, sauf qu'il pousse aussi loin que possible, dans les limites des connaissances mathématiques de son époque, son idée de génie, la MED moderne et sa notion de programme, dernière grande invention de la mécanique logico-formelle. D'autres au contraire suivront, en prétendant que la MED est un *modèle* du cerveau, voire que le cerveau est *lui-même* une MED (encore plus fort !). Leurs motivations sont souvent basées sur cet article de Turing ou sur la théorie formelle des ensembles et/ou des types : la première est une mauvaise lecture et la deuxième est erreur mathématique (suite à incomplétude *mathématique* des formalismes).

4. Prédictibilité et décidabilité

Dans un texte très bref ("Laplace", téléchargeable, web de l'auteur) on soutient l'équivalence de l'hypothèse clé du calcul des perturbations de Laplace (la prédictibilité des systèmes déterministes) et de l'hypothèse de complétude (décidabilité) des systèmes hilbertiens, une analogie proposée aussi par Girard dans son introduction à l'article de Turing. Mais dans "Laplace" on observait aussi que l'imprédictibilité déterministe à la Poincaré (le théorème des trois corps, 1891) est l'analogue et le précurseur de l'incomplétude (indécidabilité) gödelienne pour tout formalisme à la Hilbert. Il faut toutefois ajouter une nuance à cette analogie entre les deux grands résultats limitatifs respectifs : l'imprédictibilité à la Poincaré et l'incomplétude à la Gödel (qui correspond à l'indécidabilité du problème de l'arrêt, démontrée par Turing en '36 pour ses machines logiques, voir l'introduction de Girard). La première apparaît "au fini", et très tôt (cf. la divergence des coefficients de Liapounov dans les séries de Lindstedt-Fourier), la dernière est un problème "à l'infini" (l'arrêt ou la non-terminaison des calculs... for ever). Donc l'imprédictibilité est un résultat "plus fort", dans le cadre d'une équivalence philosophique essentielle des deux approches à la connaissance (laplacienne en physique et formaliste en logique) et de leurs résultats limitatifs (Poincaré et Gödel). L'imprédictibilité d'un système dynamique *physique* est reliée à l'impossibilité de principe, en particulier, de faire le même parcours dans l'espace des phases, à partir des mêmes conditions initiales (mesurées par des intervalles), tandis qu'une MED s'y obstine. Il faut observer que Turing aussi parle de l'imprédictibilité d'une MED à la grande mémoire et aux programmes très longs (p. 164), une expérience quotidienne de tout informaticien, mais il est bien clair sur ce sujet : il s'agit d'imprédictibilité pratique et non pas de principe, mathématique.

L'analyse que nous esquissons ici diffère des nombreux écrits, en Théorie de l'Esprit et en Intelligence Artificielle, au sujet du "test de

Turing"[16]. En fait, notre comparaison se développe entre prédictibilité et décidabilité et elle est philosophique, au sens de la théorie de la connaissance, mais il faut la reconstruire à partir des *mathématiques* pour comprendre pourquoi même "l'imitation", telle qu'elle est définie par Turing, est détectable. Ses limites mathématiques (géométriques) se situent précisément dans la différence entre les deux concepts. Les MED ont des propriétés d'indécidabilité à l'infini, mais sont prédictibles au fini : en regardant le programme et les bases de données discrètes on peut parfaitement prévoir le prochain pas de calcul et, surtout, elles sont prédictibles par rapport à l'itération du processus, décrite dans la §.1. Dans une MED turingienne, toutes les lois d'évolution/comportement de son propre univers sont bien explicitées (programmées) et la mesure, en tant qu'accès a une base de données digitales, est parfaite : exactement comme pour Dieu, qui connaît parfaitement les lois et la mesure dans *son* univers, le nôtre (premier Intermezzo). Le mythe de la machine formelle et de la divinité absolue se côtoient et, les deux, à leur façon, détachent l'analyse de la connaissance de son interface constitutive, entre nous et le réel. Leurs répondants dans les fondements des mathématiques ont écartelé le siècle entre formalisme mécaniciste et platonisme ontologisant[17].

---

[16] Mais pourquoi changer le nom donné par Turing au jeu de l'imitation entre une machine et un homme/ femme ? Le glissement de vision scientifique, implicite dans ce changement de nom, est très bien souligné par [Lassègue, 1998]. Mais aurait-on manqué aussi de saisir l'ironie profonde et dramatique de ce jeu improbable auquel faire participer un ordinateur : jouer à la différence entre homme et femme ? Aurait-on ignoré l'évolution et les enjeux mathématiques du projet scientifique de Turing, en même temps que la tragédie du "jeu" vécu par cet homme de génie qui s'était d'abord *projeté dans une machine* ("human computer"), condamné ensuite pour son homosexualité et bientôt suicidé ; aurait-on autant mal compris ses mathématiques qu'ignoré sa souffrance entre être et imitation : homme/femme/machine ?

[17] Turing est tellement convaincu que toute MED est laplacienne qu'il fait une erreur : il explique que la sensibilité aux conditions initiales ne s'applique pas aux MED (il souligne "*discrete-state machines*", p. 146), même dans le sens que « *reasonably* accurate knowledge of the state [of the machine] at one moment yields *reasonably* accurate knowledge any number of steps later » (p. 146, mais la traduction française n'est pas correcte). C'est-à-dire, les MED satisfont aussi l'hypothèse erronée de Laplace au sujet des approximations. Or, cela est faux, car une connaissance "raisonnablement" approximée (mais pas exacte) de l'état/valeur de la machine pour x_0, disons, dans le calcul de la fonction logistique, suffit à rendre imprédictible, de l'extérieur, l'évolution des calculs. Mais les bases des données digitales sont exactes et la machine est laplacienne car, comme pour le Dieu dont parle Laplace, l'accès aux données, en tant que *discrètes,* est parfait et les lois, sous la forme de programmes, sont toutes explicitées : elle calcule à partir d'un x_0 bien précis, non pas sur l'intervalle d'une mesure physique. Cette erreur de Turing est compréhensible, car il y avait très peu d'expérience computationnelle, à l'époque, au sujet des suites discrètes engendrées par des équations non-linéaires (une des rares exceptions est [von Neumann, Ulam, 1947] ; le sujet sera mieux creusé à partir des années '70). Et

Les mathématiques nous ont fait comprendre combien la philosophie logico-computationnelle en cognition et dans les fondements des mathématiques relève de cette culture newtonienne-laplacienne qui a trop longtemps perduré en science, au point de gêner même le travail physico-mathématique (et de stimuler la réponse platonicienne en philosophie des mathématiques). En mécanique classique, après Poincaré, et à l'exception de Hadamard et d'un ou deux grands mathématiciens russes, il a fallu attendre les années '60 et '70 pour que soient reprises sa philosophie et ses mathématiques. En philosophie, le cognitivisme classique, pris dans le "tournant linguistique", en a subi les conséquences, car il a perdu, dans la mouvance de Boole et Frege, et contre la philosophie de Riemann et Poincaré, le "sens de l'espace" et de la complexité géométrique. Turing, en 1950, se situe entre les deux cultures, comme son article de philosophie le prouve : il faut saisir les nuances mathématiques de son discours pour l'apprécier et ne pas proclamer, contre Turing, que le cerveau *est* - ou est modélisable par - une machine de Turing, c'est-à-dire par une "machine laplacienne programmable", tout en ajoutant... "en fin de compte", phrase fatidique de toutes les réductions promises et jamais réalisées.

En fait, en cognition (mais aussi en Intelligence Artificielle classique et en philosophie - formaliste - des mathématiques, où l'on continue à revitaliser le programme laplacien de Hilbert), une réflexion critique sur ce paradigme théorique serait souhaitable, comme celle faite par Sir James Lighthill, à l'époque chairman de l'International Association for Mechanics : «Here I have to pause and speak once again on the behalf of the broad global fraternity of practitioners of mechanics. We are deeply conscious today that the enthusiasm of the forebears for the marvellous achievements of Newtonian mechanics led them to make generalizations in this area of predictability, which, indeed, we may have generally tended to believe before 1960, but which we now recognize to be false. We collectively whish to apologize for having mislead the general educated public by spreading ideas about the determinism of systems satisfying Newton's laws of motion that, after 1960, were to be proved incorrect» (Lighthill, 1986).

Bref, en physique, la philosophie laplacienne a joué son rôle, il y a environ deux siècles ; en logique, presque un siècle plus tard, elle a suggéré un formalisme élégant qui a engendré l'informatique de la séquentialité et ses belles mathématiques (ainsi qu'une philosophie de la connaissance ancrée sur la physique du XIXème siècle), mais tout ceci est fini, *même en informatique*. Bien évidemment, certains

---

elle est la même erreur mathématique qui mène à sa tentative de "imitation non distinguable": l'idée qu'une interface ou une grille discrète de lecture, quoique approximée, permet de contrôler/prédire même une évolution instable. Non, la machine est laplacienne dans le sens que le processus se déroulent avec l'exactitude du digital et on peut prédire l'identité de l'itération.

de ses grands concepts restent des piliers des analyses modernes de la programmation des ordinateurs – les structures de types, le polymorphisme, par exemple - tout comme les notions d'hamiltonien et de lagrangien de la mécanique classique ont diffusé dans les différentes branches de la physique du XXème siècle, mais le cadre conceptuel et sa philosophie sont en train de changer radicalement. En fait, en informatique, le temps est venu pour la calculabilité du "data flow", de la synchronie et de la concurrence dans les systèmes distribués (dans l'espace), par opposition à celle des calculs "input-output", hors du monde – car hors de l'espace et du temps physiques (leur temps est sécrété par l'horloge, voir (Bailly, Longo, 2003)) - propres aux machines séquentielles de Laplace-Turing. Ces machines concurrentes restent des MED, donc elles sont bien différentes de tout système dynamique (continu, disait Turing), mais elles posent des problèmes physiques, comme tout système réel, donc d'ordre aussi spatio-temporel (synchronisation, connectivité - comme homotopie, par exemple, (Goubault, 2000)). Leurs mathématiques sont en train de se faire et de nous donner une théorie des calculs discrets qui enrichit fortement celle de Turing, Church et des autres grands des années '30, car elle répond à d'autres questions que celles de la calculabilité à la Turing (voir (Aceto et al., 2003)).

CONCLUSION : IRRÉVERSIBLE VS. IRRÉPÉTABLE

Nous avons brièvement mentionné le rôle essentiel, constitutif, du déterminisme dans les théories physiques classiques ; un rôle confirmé par le grand tournant de Poincaré, qui a disjoint, mathématiquement, le déterminisme de la prédictibilité. Par ce biais, il nous a fait comprendre la nature de l'aléatoire *épistémique*, dans le cadre des théories déterministes (ensuite on est même arrivé à dire qu'une suite programmée est aléatoire, si on *ne connaît pas* le programme laplacien qui l'engendre et si elle a un comportement, une géométrie, ergodique). En revanche, un courant important de la physique moderne considère l'indéterminisme comme inhérent aux théories quantiques et les probabilités comme intrinsèques à cette approche de la microphysique.

Les systèmes dynamiques (thermodynamiques et de type critique) ont introduit, de façon moderne, "la flèche du temps", suite à l'irréversibilité de leurs processus. Mais il y a un autre concept que l'informatique met au centre de sa propre construction scientifique : celui de la *répétabilité* des processus. En fait, la possibilité de répéter le déroulement du calcul dans le temps – c'est-à-dire de recommencer dans les mêmes conditions initiales et de parcourir exactement la même évolution – est inhérente à la notion de programme : même en présence d'une éventuelle sensibilité aux conditions initiales (des équations implémentées, par exemple), la nature discrète du système permet de ne pas en subir les conséquences. Voilà une composante essentielle, constitutive, de la nature laplacienne des MED (machine *à états discrets)*, à laquelle fait si clairement référence Turing : « une des propriétés *essentielles* des... MED est que ce phénomène ne se produit pas ». Bref, si un système est stable *ou* s'il est une MED, alors ses trajectoires sont répétables, car il n'est pas sensible aux conditions initiales *ou* l'éventuelle sensibilité n'arrive pas à déployer ses effets “déstabilisants”, car la réinitialisation est parfaite et l'imprédictibilité est transformée dans une propriété “à l'infini” (l'indécidabilité du problème de l'arrêt, à la Turing, voir le début du §.4). Comme un pendule simple, comme une horloge, un ordinateur itère sans difficultés : en fait, l'itération est leur métier, leur force. Et l'itération, en calculabilité, commence par la récursion primitive, propre aux fonctions de l'arithmétique d'Herbrand et Gödel, passe par la récursion générale de ce même système formel et du lambda-calcul et arrive à une propriété globale très importante des programmes : la portabilité du logiciel (achèteriez vous du logiciel s'il n'était pas transférable sur n'importe quelle machine et itérable à loisir ?). La répétabilité donc, le long des processus discrets, est inhérente à la théorie de la calculabilité et à son remarquable développement pratique, l'informatique. En particulier, elle nous dit qu'une chose est la modélisation physico-mathématique, par des équations avec leurs solutions, continues ou analytiques de préférence, une autre est l'implantation de ces dernières sur une MED : cette implatation nous donnera une imitation absolument remarquable et indispensable à la science moderne, mais essentiellement différente du processus physique, car elle est une réalisation discrète de la modélisation mathématique continue. Il faut saisir ce point pour développer et appliquer au mieux ce talent de l'itération propre aux MED. Galilée nous aurait envié énormément la possibilité d'itérer sans limites des expériences physiques virtuelles : il devait se contenter de lancer et relancer son simple pendule et son poids, pour comprendre et nous proposer les premières grandes idées de la physique classique.

En revanche, les processus dynamiques un peu plus complexes – au centre de notre attention aujourd'hui, ne sont pas répétables : un double pendule ou un fleuve turbulent n'arrivent pas à (re-)parcourir exactement la même trajectoire[18]. L'irrépétabilité est un concept à ajouter à l'irréversibilité : il ne coïncide pas avec cette dernière, car on peut concevoir l'itération de l'évolution irréversible d'un gaz, en tant qu'évolution *globale*, statistique, du système. C'est le comportement *local* d'une particule ou la série de (fluctuations,

---

[18] Les théorèmes de récurrence, pour certains systèmes dynamiques, confirment ultérieurement la différence : une implantation discrète force l'itération identique, quand l'intervalle de récurrence est en dessous de l'approximation décimale consentie. Mais cela peut demander *beaucoup* de temps. (Cette remarque au texte est due à Sidney Frankel). En fait, comme nous avons déjà observé, toute suite décrite par une fonction itérée est périodique, sur une MED concrète, et la périodicité est le contraire de l'ergodicité (mais la période peut être *très* longue).

bifurcations) qui est irrépétable : en général, on n'aura pas la même évolution, dans la même direction temporelle et avec la même trajectoire. Conjointement à la détermination, le couple (fluctuation, bifurcation) est constitutif de la dynamique classique et encore plus des processus du vivant : avec la stabilité structurelle, il participe à la morphogenèse à la Turing et à la variabilité qui est au cœur de l'évolution, phylogénétique et ontogénétique ; il contribue à la dynamique des phénomènes cognitifs.

Voilà l'enjeu proposé par notre réponse à Turing, basée sur l'irrépétabilité de certains processus "continus", dans le cadre physique que lui-même suggère pour son jeu. Un cadre qui est un déplacement d'attention scientifique de sa part : ses premiers travaux et sa machine formelle font partie des grandes idées de la logique et des fondements des mathématiques des années '30 ; ses réflexions, dans son article de 1950, s'enrichissent d'un regard sur la physique contemporaine. Il sort donc des limites de la philosophie laplacienne qui avait caractérisé ses premières années de travail en logique. Mais comment est-il possible qu'une filière entière de réflexion scientifique, techniquement si importante, la logique mathématique, ait pris un si grand retard, en philosophie de la nature et de la connaissance, par rapport aux autres disciplines, la physique en particulier ?

La responsabilité grave, historique, des philosophies rattachées au logicisme et au formalisme a été tout d'abord d'isoler les problèmes des fondements des mathématiques de notre rapport à l'espace phénoménal (on en discute dans (Longo, 2002a et 2003)). Ce choix avait à l'origine des bonnes motivations, très bien explicitées par les deux grands fondateurs, justement inquiets en raison du bouleversement des géométries non-euclidiennes : il fallait d'urgence abandonner toute référence à l'espace physique et baser l'analyse fondationnelle sur la logique pure et/ou la cohérence formelle ((Frege, 1884) et (Hilbert, 1899))[19]. Or, cette cassure théorique nous a donné de remarquables machines logico-formelles, aussi parfaites

[19] Cette histoire de bien expliciter les hypothèses doit être propre aux grands (Laplace, Frege, Hilbert, Turing …) : probablement puisqu'ils comprennent la nouveauté du cadre conceptuel original qu'ils proposent. Sinon, on trouve, même tout récemment, des gens qui disent d'avoir "démontré" la thèse de Church ; petite hypothèse implicite : l'Univers, avec tous ses sous-systèmes, est une énorme machine laplacienne. Or, la thèse de Church est une implication, qui va d'une définition informelle, celle de calcul déductif potentiellement mécanisable à la Hilbert, à des systèmes formels bien précis (Church, Turing...). En tant qu'implication, aujourd'hui on peut dire qu'elle est certainement, mais tout juste, dans les limites de la vérité, au sens de Thom : « la limite du vrai n'est pas le faux, mais l'insignifiant » (voir pour une appréciation moderne [Aceto et al., 2003]). Bien évidemment, le but ultime de ces "preuves" est de parler du cerveau, sous-système fini de l'Univers (pour une brève histoire de la Thèse de Church - de Church-Turing, plus précisément - et de ses caricatures physiques et cognitives, voir [Copeland, 2002], dans http://plato.stanford.edu/entries/church-turing/#Bloopers).

que hors du monde (au moins jusqu'à l'arrivée des réseaux et de la concurrence). Mais, en même temps, elle a séparé l'analyse des fondements des mathématiques et, encore pire, l'analyse des fondements de la cognition, de ceux des sciences de la nature, justement au moment où les nouvelles théories physiques démarrent, entre le XIXe et le XXe siècle, par le problème de l'intelligibilité mathématique de l'espace (géométrie des systèmes dynamiques et des espaces relativistes). Par conséquent, elle les a séparées de nos efforts de construction de la connaissance scientifique moderne, si fortement corrélés à la constitution des concepts et des structures mathématiques, ainsi que du grand tournant en philosophie de la nature et de la connaissance proposé par les nouvelles théories physiques. Les symétries et leurs brisures, par exemple, au cœur des fondements de la physique moderne, apparaissent seulement chez Weyl comme composantes des fondements des structures mathématiques (Weyl, 1952) et, tout récemment, en théorie de la preuve, grâce aux travaux de Girard. En revanche, la scolastique platonisme/formalisme dominante en philosophie des mathématiques (les triangles et les nombres réels existent-ils vraiment ?)[20] est passée à côté des grands débats fondationnels en physique, au sujet de l'espace, de la détermination, de la "non-localité" etc. (systèmes relativistes, dynamiques, quantiques), qui ont marqué le siècle. Et elle nous a laissé avec des formalismes, techniquement formidables pour inventer et travailler sur des MED, mais laplaciens dans la conception du monde – ou dans l'organisation de leur propre univers, partagé en petites cases discrètes et stables, bien localisées, comme les bits de la mémoire d'un ordinateur digital. Turing était en train de saisir ce point, comme témoigne son jeu de l'imitation entre systèmes déterministes ayant des évolutions spatio-temporelles différentes, un "jeu" qu'il situe tout d'abord entre le discret et le continu ; mais il est mort, à 42 ans.

Essayons de ne plus faire la même impasse sur la biologie, dont les sciences cognitives ne peuvent pas se passer, car le vivant a encore moins de sens sans son espace, son action dans un écosystème, sa dynamique de formes. Un dialogue avec ces sciences en forte croissance, dans lequel les mathématiques ne peuvent prétendre à aucune hégémonie, ni priorité ontologique, et qui soit en même temps technique et fondationnel, est essentiel aux mathématiques et à leurs fondements, car il ne peut pas y avoir de philosophie des mathématiques sans une philosophie de la nature. Voilà l'un des grands enseignements de cet article de Turing, et, bien avant, aussi de Poincaré et de H. Weyl, (Weyl, 1918 et 1927) ; un autre "loup solitaire" - selon sa propre définition - à une époque où l'on essayait encore de démontrer la complétude laplacienne des systèmes logico-formels potentiellement mécanisables. Des systèmes

[20] « … la Scylla de l'ontologisme, … la Charybdis du nominalisme … des deux cotés je vois surgir devant nous le spectre d'une nouvelle scolastique » [Enriques, 1935].

déductifs dont certains cherchent, même aujourd'hui, l'implantation dans le cerveau et, parfois, prétendent parler au nom de Turing ; et ils passent de l'imitation au modèle, jusqu'à la séduction discrète de la métaphore[21].

La distinction – esquissée par Turing et qui se trouve au cœur de notre analyse – entre modélisation (en tant que saisi/proposition de principes constitutifs d'un phénomène) et imitation (fonctionnelle, sans engagement sur la structure et la causalité propres au phénomène à imiter), est une idée fondamentale ; elle est à reprendre en profondeur aujourd'hui, du point de vue fondationnel et pratique, car les machines à états discrets sont au cœur de toute modélisation/imitation en science de la nature, voire un instrument indispensable de l'avancée même de la science moderne. Un projet récent, (voir l'équipe "Complexité et information morphologique"[22]), essaye de proposer un dialogue fondationnel avec les sciences de la nature (voir (Longo, 2003), (Bailly, Longo, 2003), (Bailly, Longo, 2003a)) ainsi que quelques alternatives, modestes et spécifiques, à l'impasse du codage arithmétique du monde – un codage qui est en train de changer ce même monde par les descendants de la MED de Turing et leurs formidables réseaux, mais qui, transformé en philosophie de la connaissance, peut nous empêcher d'en saisir la complexité et... de commencer à penser à la prochaine machine.

Remerciements. Une question et l'intérêt de Jean Petitot m'ont encouragé à clarifier une brève réflexion par écrit. Mais cet article n'aurait pas été possible sans les maintes discussions avec Francis Bailly, sans son enseignement du "sens de la physique" et de la singularité physique du vivant. Jean-Yves Girard dans l'introduction au texte de Turing, et comme d'habitude, nous oblige à penser (et à apprécier la "secrète noirceur du lait" ou l'importance de la sensibilité philosophique et poétique en science). Jean Lassègue a enrichi le texte par des nombreuses remarques critiques et des références. Cédric Paternotte a soulevé des questions très intéressantes. Le travail patient des rapporteurs l'a rendu un peu plus lisible.

---

[21] « Le modèle simplifie, la métaphore complique » [Nouvel, 2002] ; elle ajoute de l'information, elle fait référence à un (autre) cadre conceptuel prégnant, un univers de méthodes et de connaissance que l'on transfère sur celui de départ. « Lorsqu'un modèle fonctionne comme métaphore, le modèle devient l'objet d'une séduction pour la pensée. Si on l'utilise alors comme suggestion pour la solution d'une question philosophique, on parviendra, à la faveur de cette confusion, à faire apparaître cette métaphore comme une "conséquence philosophique" » de la modélisation mathématique [Nouvel, 2002].

[22] Page web : http://www.di.ens.fr/users/longo/CIM/projet.html.

Références

(Des versions préliminaires ou revues des articles de Longo sont téléchargeables de http://www.di.ens.fr/users/longo, y compris l'introduction à Aceto et al., 2003).

Aceto L., Longo G., Victor B. (eds.) The difference between Sequential and Concurrent Computations. Special issue*, Mathematical Structures in Computer Science*, Cambridge U. Press, n. 4-5, vol. 13, 2003.

Adler R. L. Topological entropy and equivalence of dynamical systems, *American Mathematical Society*, 1979.

Amadio R., Curien P.-L. *Domains and lambda-calculi*, Birkhuaser, to appear, 1998.

Asperti A., Longo G*. Categories, Types and Structures*, M.I.T. Press, 1991.

Bailly F. L'anneau des disciplines, *n. spécial de la Revue Internationale de systémique*, vol. 5, n. 3, 1991.

Bailly F., Longo G. "Space, Time and Cognition in Mathematics and Natural Sciences" *in Causality and Mind* (Peruzzi ed.), Kluwer, to appear, 2003 (version française à paraître dans la Revue de Synthèse, Paris, 2003).

Bailly F., Longo G. "Incomplétude et incertitude en mathématiques et en physique", *actes du colloque en mémoire de Gilles Châtelet*,Paris, Juin 2001, et *actes du colloque Giulio Preti a trent'anni dalla scomparsa*, Castello Pasquini, Castiglioncello (LI), Ottobre 2002, à paraître 2003a.

Bailly F., Longo G. "Objective and Epistemic Complexity in Biology" 2003b (in preparation).

Barendregt H. *The lambda-calculus: its syntax, its semantics*, North-Holland, revised edition, 1984.

Cannone M. "Harmonic analysis tools for solving Navier-Stokes equations", to appear in *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, vol. 3, (S. Friedlander, D. Serre, eds.), Elsevier, 2003.

Copeland B. "The Church-Turing Thesis", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Web edition in http://plato.stanford.edu/entries/church-turing/#Bloopers, 2002.

Dahan Delmedico A., Chabert J.-L., Chemla K. *Chaos et déterminisme*, Seuil, 1992.

Devaney R. L. *An Introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1989.

Enriques F., "Philosophie scientifique et empirisme logique", *Actes du Congrès international de philosophie scientifique*, Hermann, Paris, 1935.

Farge M. "Evolution des théories sur la turbulence développée", dans [Dahan et al., 1992].

Frege G. *The Foundations of Arithmetic*, 1884 (english transl. Evanston, 1980.)

Gandy R. "The Confluence of Ideas in 1936", in *The Universal Turing Machine*, Rolf Herken ed., Oxford University Press, Oxford, 55-111, 1988.

Girard J.Y., Lafont Y., *Taylor P. Proofs and Types,* Cambridge U. Press, 1990.

Gödel K., Nagel E., Newman J., Girard J.-Y. *Le théorème de Gödel*, Seuil, 1989.

Goubault E. (ed.) Geometry in Concurrency, *Special issue, Mathematical Structures in Computer Science*, Cambridge U.P., vol.10, n.4, 2000.

Hilbert D. *Les fondements de la géométrie*, 1899 (trad. fran., Dunod, 1971).

Hindley R., Seldin J. *Introduction to Combinators and Lambda-Calculus*, London Mathematical Society, 1986.

Howard W. "The formulas-as-types notion of construction", (Manuscript written in 1969) *in* To H.B. Curry: *Essays in Combinatory Logic, Lambda-calculus and Formalism,* (Seldin, Hindley eds.) Academic Press, London, 1980.

Krivine, J.L. *Lambda-calcul : types et modèles*, Masson, Paris, 1990.

Lassègue J. *Turing*, Les Belles Lettres, Paris, 1998.

Lighthill J. "The recent recognized failure of predictability in Newtonian dynamics" *Proc. R. Soc*. Lond. A 407, 35-50, 1986.

Longo G. "On Church's formal theory of functions and functionals" Invited lecture, Conference on *Church's Thesis after 50 years*, Zeiss (NL), June 1986, *in Annals Pure Appl. Logic*, 40, 93-133, 1988.

Longo G. "Mathematical Intelligence, Infinity and Machines: beyond the Gödelitis" *Journal of Consciousness Studies, special issue on Cognition*, vol. 6, 11-12, 1999.

Longo G. "On the proofs of some formally unprovable propositions and Prototype Proofs in Type Theory" Invited Lecture, Types for Proofs and Programs, Durham, (GB), Dec. 2000 ; *Lecture Notes in Computer Science*, vol 2277 (Callaghan et al. eds), pp. 160 - 180, Springer, 2002.

Longo G. "The reasonable effectiveness of Mathematics and its Cognitive roots". To appear in "*New Interactions of Mathematics with Natural Sciences*" (L. Boi ed.), Springer, 2002a.

Longo G. "The Constructed Objectivity of Mathematics and the Cognitive Subject", *in Quantum Mechanics, Mathematics, Cognition and Action* (M. Mugur-Schachter ed.), Kluwer, 2002b.

Longo G. "Space and Time in the Foundations of Mathematics, or some challenges in the interactions with other sciences". Invited lecture, *First American Math. Soc./SMF meeting*, Lyon, July, 2001 (to appear, 2003).

Meyer R. E. *Transition and Turbulence*, Academic Press, 1981.

von Neumann J., Ulam S. "On combinations of stochastic and deterministic processes". *Bull. AMS*, 53, 1120, 1947.

Nouvel P. "Modèles et métaphores" *dans Enquête sur le concept de modèle*, Nouvel P. (ed.), Presses Univ. de France, 2002.

Petitot J. "Note sur la querelle du déterminisme", *dans La querelle du déterminisme*, (Amsterdamski et al.) Gallimard, Paris, 1990.

Stewart J. "La modélisation en biologie" *dans Enquête sur le concept de modèle*, Nouvel P. (ed.), Presses Univ. de France, 2002.

Turing A. "On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proc. London Math. Soc*. 42, 230-265, 1936.

Turing A. 1948. “Intelligent Machinery”. National Physical Laboratory Report. In Meltzer, B., Michie D. (eds) 1969. *Machine Intelligence* 5. Edinburgh University Press.

Turing A. “Computing Machines and Intelligence”, Mind, LIX, 1950 (traduction et introduction dans A. Turing, J.-Y. Girard, *La machine de Turing*, Seuil, 1991).

Turing A. M. “The Chemical Basis of Morphogenesis” *Philo. Trans. Royal Soc.,* B237, 37-72, 1952.

Weyl H. *Das Kontinuum*, 1918 (trad. italiana di B. Weit, Bibliopolis, 1977).

Weyl H. *Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences*, 1927 (english transl., Princeton University Press, 1949).

Weyl H. *Symmetry,* Princeton University Press, 1952.

Wittgenstein, L. *Remarks on the Philosophy of Psychology*. Vol.1 Blackwell Oxford, 1980.