Intellectica, 2004/2, **39**, pp. 23-53

Babbage et Boole : les lois du calcul symbolique

Marie-José DURAND-RICHARD*

RÉSUMÉ. Dans la première moitié du 19ème siècle, Charles Babbage (1791-1871) conçoit les plans de sa "machine analytique", aujourd'hui catégorisée comme calculatrice automatique et mécanique à programme externe, avant que George Boole (1815-65) ne produise la première formulation mathématique d'une logique attachée depuis Aristote à l'analyse du langage. Le propos de cet article est de montrer que ces auteurs, qui sont en général convoqués indépendamment l'un de l'autre, appartiennent à un même réseau d'algébristes anglais, et de resituer leur entreprise parmi les effets, conceptuels et institutionnels, de la Révolution Industrielle. Ces algébristes, nourris de l'empirisme et de la philosophie du langage de Locke, n'interviennent pourtant pas dans une perspective constructiviste. Réformateurs anglicans, ils attribuent la nécessité des mathématiques à un calcul symbolique radicalement premier, explicitant les opérations de l'esprit indépendamment de toute contingence interprétative. Ils inaugurent une séparation radicale, mais cependant hiérarchique, entre opérativité et signification du calcul symbolique.

Mots clés : Babbage, Boole, algèbre, logique, calcul symbolique, interprétation, lois de la pensée.

ABSTRACT. Babbage and Boole: the laws of symbolical calculus. In the first half of the XIXth century, Charles Babbage (1791-1871) designed his "analytical engine", which today is identified as a mechanical computer with an external program. Prior to that, George Boole (1815-65) produced the first mathematical writing of logic which, since Aristotle, had been linked with the analysis of language. The aims of this paper are to show that these two authors whose works are not generally associated, belong to the same English algebraical network, and to situate their achievement within the conceptual and institutional effects of the Industrial Revolution. Although these algebraists moved within the framework of Locke's empiricism and philosophy of language, they cannot be identified in a constructivist perspective. As Anglican reformers, they assigned the necessity of mathematics to a radically primary symbolical calculus, making explicit the operations of mind, independently of contingent interpretations. They introduced a radical separation, within a hierarchical relationship, between the operativity and the meaning of symbolical calculus.

Key words: Babbage, Boole, algebra, logic, symbolical calculus, interpretation, laws of thought.

INTRODUCTION

Si les disciplines nouvelles sont souvent en quête de pères fondateurs, ce n'est pas dans cette perspective que sont abordés ici les travaux de Charles Babbage (1791-1871) et de George Boole (1815-64), qui interviennent un siècle avant la construction des premiers ordinateurs. Certes, les plans de la « machine analytique » qu'élabore Babbage à partir de 1834 sont ceux d'une calculatrice automatique et mécanique à programme externe, dont les différen-

* Université Paris 8 (Vincennes Saint-Denis), Histoire et Épistémologie des Sciences et des Techniques, chercheur associé REHSEIS-UMR 7596 – CNRS, e-mail : mj.durand-richard@laposte.net.

tes fonctions opératoires sont matérialisées par une partie spécifique de la machine. Et cet apport lui vaut d'être considéré comme un pionnier de l'informatique (Hyman, 1983). Quant à Boole, il est reconnu pour l'algèbre qui porte son nom, et dont la structure est à la fois celle du calcul des classes et du calcul des propositions, et celle des circuits à relais et commutateurs, comme l'a montré Claude E. Shannon (1916-2001) en 1936. Cette algèbre dite « de Boole » ne correspond pourtant pas à celle qu'il élabore, et qui marque la première étape du processus de mathématisation de la logique, après plus de vingt siècles d'une structuration de la logique à partir de l'analyse aristotélicienne du langage. Il convient donc de distinguer entre la référence à ces auteurs, qui sert tout au plus à un repérage dans le temps, à une recherche de paternité, voire à une légitimation par le passé, et l'analyse des processus de conceptualisation. Mon propos est ici de montrer que si Babbage et Boole sont, le plus souvent, convoqués séparément, ils appartiennent à un même courant de pensée, celui de l'École Algébrique Anglaise, qui s'attache, dans la première moitié du XIX^{ème} siècle, à développer une conception à la fois symbolique et algorithmique de l'algèbre. Il s'agit d'examiner les conditions d'émergence de ce courant de pensée et les implications dont est porteuse l'épistémologie sous-jacente à leur conception de la logique des opérations, qui peuvent éclairer certaines de ses limitations présentes. Le problème principal de ce réseau de mathématiciens est de légitimer ontologiquement la possibilité d'effectuer automatiquement, c'est-à-dire mécaniquement, des calculs, en opérant sur des symboles, sans se soucier d'une signification devenue problématique. Les débats portent alors sur l'acceptation ou le rejet de résultats alors obtenus par une heuristique algébrique qui met en œuvre de manière très féconde une induction et des analogies opératoires qui ne sauraient suffire à fonder l'algèbre comme science. Le contexte de ce questionnement n'est pas neutre. Cette école intervient précisément au moment où l'Angleterre travaille à intégrer les effets de sa Révolution Industrielle (1760-1830). Le fossé qui se creuse alors entre les classes gouvernantes traditionnelles et la bourgeoisie montante ne provient pas seulement de leur opposition en tant que classes sociales, il se nourrit aussi de représentations divergentes du monde, tant physique que socio-politique. La question de ce qui peut et doit assurer la stabilité des institutions ne se pose pas seulement en principe. Alors que les Universités anglicanes de Cambridge et d'Oxford perpétuent des formes d'enseignement qui fondent leur légitimité sur la pérennité de leur attachement au passé, et sur le présupposé d'une harmonie naturelle inscrite dans le dessein divin, le puissant impact de la Révolution Industrielle crédibilise l'idée même de transformation du monde et d'opérativité de l'action, conception où l'analyse de la division du travail joue un rôle crucial. Dans la mesure où l'identification entre pouvoir spirituel et pouvoir temporel est une des formes idéologiques à travers laquelle est symbolisée l'unité du pays, leur séparation ne saurait avoir lieu sans que d'autres formes de stabilité intellectuelle et institutionnelle ne s'y substituent. La science se trouve elle-même réinterrogée dans ses formes d'organisation et dans ses méthodes, quant au rôle à attribuer à l'expérience, au raisonnement, et à ceux qui les mettent respectivement en œuvre.

Les mathématiciens de l'École Algébrique Anglaise sont au cœur d'un vaste réseau de réformateurs progressistes, présenté tantôt comme le «network» de Cambridge (Cannon, 1964), tantôt comme celui des “Gentlemen of science” (Morrell et Thackray, 1981), dont l'action débouchera sur la restructuration du réseau des sociétés savantes et sur la réforme sécularisant les Universités anglicanes. Leur conception symbolique et algorithmique de l'algèbre est élaborée dans ce cadre. Visant à substituer l'algèbre à la géométrie comme discipline fondamentale pour la structuration des connaissances, elle cherche à la fois à affirmer son statut de science et à y intégrer des résultats obtenus par une heuristique jugée incompatible avec ce statut. C'est dans ce cadre que se trouve alors établie une séparation radicale entre le symbolisme opératoire et les interprétations du calcul, séparation qui apparaît comme la condition même d'une subordination des vérités contingentes aux vérités nécessaires. Elle s'appuie structurellement sur une conception des mathématiques comme langage, et sur la conception du langage développée par John Locke (1632-1704) dans son *Essay on Human Understanding* (1690), bien plus que sur les travaux de Thomas Hobbes (1588-1678) et de Gottfried W. Leibniz (1646-1716) auxquels les historiens de l'informatique ou de l'intelligence artificielle se réfèrent le plus souvent. Elle engage de ce fait des présupposés qu'il convient de ne pas perdre de vue dès lors qu'est affirmé comme légitime le fonctionnement d'un tel système conceptuel.

C'est en spécifiant la problématique dans laquelle s'inscrit l'élaboration de l'algèbre symbolique, et en indiquant ses implications épistémologiques que je montrerai en quoi le recours à la philosophie de Locke s'avère constitutif, et en quoi les travaux de Babbage et de Boole s'y intègrent. C'est la radicalité de la séparation entre le caractère aveugle du calcul logique et l'interprétation des symboles et des résultats dont il conviendra d'interroger l'épistémologie sous-jacente dans le contexte des développements scientifiques et philosophiques du XX^ème^ siècle.

SITUATION SOCIOLOGIQUE ET CONCEPTUELLE DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiciens de l'École Algébrique Anglaise, parmi lesquels Babbage et Boole, interviennent dans une Angleterre où le problème crucial est d'adapter l'ensemble des institutions du pays aux profondes transformations issues de la Révolution Industrielle. La Réforme Électorale de 1832 traduit l'ascension d'une nouvelle bourgeoisie urbaine et provinciale. Autour des Académies dissidentes, et des nombreuses sociétés savantes créées en province depuis la fin du XVIII^ème^ siècle s'exprime une conception de la science marquée par un utilitarisme fondamental, en rupture avec la conception du savoir qui fonde la formation des classes gouvernantes et du clergé dans les Universités de Cambridge et d'Oxford (Durand-Richard, 1996).

Dans ces Universités anglicanes — les deux seules universités anglaises avant la création de l'Université de Londres en 1828 — l'enseignement se doit d'être conforme aux conceptions de la théologie naturelle, en même temps qu'il forme ces futurs hommes de loi que sont hommes d'église, avocats et parlementaires, aux valeurs qui légitiment la stabilité de l'organisation sociale. Toute connaissance rationnelle est connaissance du monde créé par Dieu, et contribue à la célébration de son omnipotence. « La préservation et l'ordre de la communauté » (Whewell, 1850, 1) y sont plus essentielles que l'esprit d'innovation. A Oxford, l'enseignement reste fondé sur la logique scolastique. Et si les mathématiques constituent « la gloire et l'honneur » de l'université de Cambridge, leur enseignement y reste figé dans une double fidélité à la géométrie euclidienne, science déductive par excellence, et à la conception fluxionnaire du calcul infinitésimal élaborée par Isaac Newton (1642-1727) un siècle plus tôt, alors que les mathématiciens continentaux ont en approfondi les possibilités pendant tout le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle en utilisant la notation différentielle de Leibniz. Les débats relatifs au statut de la connaissance vont porter :

– d'une part, sur la légitimité de l'analyse mathématique, dont les développements continentaux ne peuvent plus être ignorés, surtout depuis la *Mécanique Céleste* de Pierre Simon de Laplace (1749-1827) : comment expliquer qu'elle corrobore la mécanique newtonienne alors que l'algèbre, issue d'une symbolisation progressive de l'arithmétique, est considérée comme relevant de la pratique ? comment garantir la certitude d'une démonstration dans le champ d'une algèbre dont certains objets, comme les quantités négatives ou impossibles, échappent aux définitions arithmétiques ? comment fonder en raison le saut conceptuel qui a lieu dans tout processus de généralisation, entre le moment où on repère une propriété par des vérifications sur des exemples numériques, et celui où on l'affirme comme générale en l'écrivant avec des symboles littéraux ?

– d'autre part, sur la légitimation des sciences nouvelles, dès lors qu'elles tendent à se développer hors du cadre de la théologie naturelle : comment donner un statut de permanence aux pratiques expérimentales ? comment conférer l'objectivité à ce type de résultats ? La question du statut de l'économie politique, qui se substitue alors à la philosophie morale, est particulièrement cruciale : est-elle une science déductive *a priori* ou une science expérimentale ? la seule logique peut-elle fonder des vérités nouvelles ? celles-ci ne sont-elles pas plutôt fondées sur les mathématiques ? et si c'est le cas, quel est alors le statut de ces mathématiques : est-ce celui de la géométrie, science déductive par excellence, ou celui d'une algèbre sans cesse mis en cause ?

A travers ces questions de recomposition fondatrice des connaissances, aussi bien en mathématiques qu'en logique, s'exprime la nécessité d'identifier et de distinguer les connaissances qui expriment la stabilité du monde, et celles qui expriment son évolution dans le temps, tout en maintenant son unité profonde en tant que création divine, « le monde lui-même n'étant rien d'autre qu'une expression de la pensée de son Auteur se réfléchissant elle-même », comme l'écrira Boole, citant Saint-Anselme (Boole, 1992, 398), dans le dernier chapitre de son *Investigation on the Laws of Thought*.. Dans un tel cadre, stabilité physique et stabilité sociale vont de pair, et sont envisagées à partir d'un ordre considéré comme naturel, qu'il convient seulement de découvrir et d'expliciter en inventant les méthodes les plus adéquates.

Dans l'état de tension politique et sociale où se trouve le pays, face à des institutions non adaptées aux bouleversements produits par son développement économique, les débats engagés dans toute la Grande-Bretagne trouvent écho aussi bien à Oxford qu'à Cambridge, où s'expriment les réformateurs conscients de la nécessité d'adapter structures de l'Université et contenus de l'enseignement afin que les classes gouvernantes disposent des moyens de comprendre sur le fond la situation ainsi produite, afin d'en intégrer les potentialités tout en se préservant des risques d'une révolution politique à la française.

A Oxford, le groupe des Noétiques réunit ceux qui tentent d'intégrer certains enseignements nouveaux dans le curriculum, à condition qu'ils puissent s'intégrer aux valeurs du corpus traditionnel. C'est ainsi que Richard Whately (1787-1863), Fellow à Oriel College, puis archevêque de Dublin dès 1831, va jouer un grand rôle dans la diffusion des idées de Thomas Robert Malthus (1766-1834) et de David Ricardo (1772-1823), dans les cercles anglicans et auprès des universitaires d'Oxford. Soucieux de juguler les risques de sécularisation des connaissances que comporte cette économie politique, et du caractère réducteur de la conception de l'homme qu'elle induit, il tente, dans ses *Introductory Lectures on Political Economy*, données à Oxford en 1831, de les reformuler dans le cadre de la théologie naturelle de William Paley (1743-1805). C'est directement aux *Elements of Logic* (1826) de Whately que répond Boole lorsqu'il écrit *Mathematical Analysis of Logic* en 1847. Ces *Elements* contiennent en appendice un texte de Nassau W. Senior (1790-1864) sur l'analyse des termes de l'économie politique. Les Noétiques d'Oxford s'appuient sur la philosophie de l'esprit du philosophe écossais Dugald Stewart (1753-1828) pour faire obstacle au matérialisme induit par les utilitaristes londoniens, tout en ignorant son rejet de la logique scolastique, à laquelle ils parviennent à intégrer l'induction (Corsi, 1988).

A Cambridge, le groupe des Analytiques se constitue dès 1812 à l'initiative d'un Babbage encore étudiant. Ce groupe interviendra essentiellement sur deux terrains :

– celui de la réforme des institutions scientifiques, menées dès les années 1820, d'abord localement, en imposant l'usage de la notation leibnizienne au "Senate House Examination" et dans les Collèges à Cambridge, et en y fondant la "Cambridge Philosophical Society", puis avec la création de nouvelles sociétés d'importance nationale, comme la "Royal Astronomical Society», ou la «British Association for the Advancement of Science", chargées de rétablir l'équilibre géographique et socioculturel face aux nombreuses sociétés savantes créées en province au tournant du siècle (Morrell & Thackray, 1981). Il s'agit de faire face au déclin de la science en Angleterre, stigmatisé par Babbage en 1830 qui s'attaque ainsi à la *Royal Society,* et d'inciter le gouvernement à mieux soutenir les institutions scientifiques, sur le modèle français.

– celui de la restructuration des mathématiques, où ils vont faire école, une école successivement qualifiée, selon les auteurs, d'École Philologique (Hamilton, 1837), d'École Symbolique (Mac Farlane, 1916), et plus récemment, d'École Algébrique (Novy, 1968). La réflexion menée au sein de ce groupe sur le symbolisme algébrique, à partir de la volonté d'introduire à Cambridge la notation leibnizienne du calcul infinitésimal, débouche sur la conception de l'Algèbre Symbolique proposée par George Peacock (1791-1858) en 1830 dans son *Treatise of Algebra,* destiné aux étudiants, et en 1833 dans son *Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis,* à destination du monde savant réuni à Cambridge pour la 3ème réunion de la *British Society for the Advancement of Science*. Cette Algèbre Symbolique, conçue comme un « système de combinaisons de symboles arbitraires » (Peacock, 1833, 194), structurant l'ensemble des résultats mathématiques connus ou à connaître en tant que « langage du raisonnement symbolique » (Peacock, 1830, 1), introduit une rupture épistémologique fondamentale entre validité universelle des calculs et vérité contingente des interprétations. Les machines de Babbage, aussi bien la machine aux différences que la machine analytique, matérialiseront cette séparation systématique et générale entre procédures opératoires et résultats numériques.

Une seconde génération de mathématiciens, à laquelle appartient Boole, se réclamant explicitement de l'algèbre symbolique (Gregory, 1840 ; Boole, 1847, 3), va en complexifier l'étude, élaborant ce que Duncan Farquharson Gregory (1813-44) nomme la science ou le calcul des opérations, et qui consiste à déterminer des classes de fonctions soumises aux mêmes lois, exprimées symboliquement par les mêmes formules, et à leur appliquer les mêmes procédures algébriques, grâce à un théorème de transfert énoncé comme fondamental.

Tous ces travaux, qui fournissent des méthodes symboliques de résolution des équations différentielles, ordinaires ou partielles, aux différences finies ou aux différences mixtes, et aux équations fonctionnelles, prennent en charge le programme de recherche que Babbage fixe très explicitement aux algébristes dès 1813, dans la très érudite préface anonyme, discutée collectivement[1], de l'unique volume de *Memoirs of the Analytical Society*. Boole s'inscrit dans la même perspective. Initié aux mathématiques continentales au *Mechanics Institute* dont son père est secrétaire et bibliothécaire, et à ses plus récents développements par l'un des membres fondateurs de The "Analytical Society" proche de Babbage, Sir Edward French Bromhead (MacHale, 1985, 68-69). Son grand article de 1844, "On a General Method in Analysis", porte précisément sur ce calcul des opérations : il part du même théorème fondamental que Gregory sur le transfert des propriétés symboliques. Et c'est sur même théorème qu'il fonde l'écriture algébrique de la logique (Laïta, 1977).

L'adaptation des lieux traditionnels d'élaboration et de transmission du savoir passe donc ainsi non seulement par leur réforme, mais par leur intégration dans un réseau plus vaste. Elle n'est pas uniquement de nature institutionnelle : elle implique un renouvellement des contenus qui ne se contente pas d'adopter les connaissances nouvelles issues d'autres milieux ou du Continent, mais qui se fonde sur une réévaluation des modes d'élaboration de la connaissance elle-même. La pérennité de la fonction des Universités suppose qu'elle soit désormais capable de penser les transformations qu'impose la Révolution Industrielle, et de donner le statut de science aux savoirs élaborant un discours sur ses expériences. Un tel renouvellement s'articule sur l'élaboration d'un système de valeurs qui préserve la possibilité d'un accord avec la conception d'une harmonie naturelle portée par la théologie naturelle, pour laquelle la science permet d'approcher au plus près l'œuvre de Dieu. Dans une telle perspective, une cohérence doit être trouvée entre les conceptions qui fondent la stabilité du monde et son évolution, ainsi que les moyens qu'a l'homme de les constituer. Stabilité et évolution ne concernent pas seulement l'état du monde, mais la connaissance elle-même, et les différents acteurs qui l'élaborent. C'est la condition *sine qua non* pour que les sciences spécialisées conservent la même légitimité que la philosophie naturelle dont Newton avait fourni les principes mathématiques, et assurer la fonction d'harmonisation nécessaire à ce que la vieille aristocratie terrienne et à la nouvelle bourgeoisie se reconnaissent ensemble dans un même mode d'appréhension d'un monde devenu industriel, où la rationalité devient synonyme d'efficacité.

A LA RECHERCHE D'UNE THÉORIE DE L'INVENTION EN ALGÈBRE

Phénomène trop souvent ignoré : le champ des mathématiques n'échappe pas à cette entreprise de restructuration des connaissances. Outre leurs interventions dans le domaine institutionnel, c'est par une réflexion d'ordre épistémologique explicite que les mathématiciens réformateurs de l'École

[1] Herschel Papers, Royal Society Library, Hs.2.9, lettre de Babbage à Herschel, estimée antérieure au 01.05.1813 ; Hs.2.12, lettre de Babbage à Herschel du 25.05.1813 ; Hs.2.13, lettre de Babbage à Herschel, estimée postérieure au 30.05.1813 et antérieure au 05.07.1813.

Algébrique Anglaise entreprennent d'élaborer une conception de l'algèbre comme science, qui permette d'intégrer les pratiques inventives à l'œuvre dès la symbolisation de l'algèbre, à un édifice théorique où elles restent soumises au raisonnement déductif.

Au tournant du siècle, deux questions majeures sont alors problématiques à propos des méthodes de l'algèbre, et des objets qu'elles autorisent. Toutes deux concernent la question de savoir si le recours aux analogies opératoires peut suffire à en légitimer les acquis, alors qu'il est clair que les objets obtenus échappent aux définitions arithmétiques initiales des opérations, et sont dépourvus d'existence, voire de signification effectives. Il s'agit :

- d'une part, de la légitimité des calculs effectués sur les quantités impossibles — nos nombres complexes —, dont Boole se servira encore pour illustrer le fait que certains calculs symboliques sur les lois de la pensée puissent ne pas être susceptibles d'une interprétation [Boole, 1992, 82-83],

- d'autre part, la méthode de séparation des symboles d'opération et de quantité, qui permet à Louis F.A. Arbogast (1759-1803) de produire une écriture simplifiée, synthétique, du théorème de Lagrange, en opérant sur les opérateurs différentiel et aux différences finies comme sur des nombres. S'appuyant sur l'analogie opératoire entre le développement d'une fonction en série de Taylor :

$$u(z+x) = u(z) + \frac{du}{dz}x + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3u}{dz^3}\frac{x^3}{3!} + \&c.$$

et la série qui définit l'exponentielle : $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \&c.$

Joseph L. Lagrange (1736-1813) avait établi, sous forme finie, une relation entre le calcul sur les différences finies et le calcul différentiel :

$$u(z+x) - u(z) = \Delta u = e^{\frac{du}{dz}x} - 1$$

Sur ses traces, en remplaçant $\frac{du}{dx}$ par `u, et en séparant ` de u, Arbogast avait obtenu, dès 1800, une relation entre l'opérateur différentiel et l'opérateur de différence finie Δ, écrivant :

$`u = ( e^{x`} - 1)\, u$ soit $` = ( e^{x`} - 1)$

et, pour la réitération de l'opération, $`^n = (e^{x`} - 1)^n$.

Ces travaux sont immédiatement connus des algébristes de Cambridge. Moins souvent évoqués comme motivation à cette restructuration de l'algèbre que les travaux sur les quantités impossibles, ils sont pourtant au cœur du programme de recherche précédemment évoqué, visant à constituer un calcul général, permettant la résolution de toute espèce d'équation. Gregory rebaptisera l'écriture d'Arbogast forme symbolique du théorème de Taylor.

Dès le tournant du siècle, Robert Woodhouse (1773-1827), alors fellow de Caius College à Cambridge, affirme l'indépendance des méthodes algébrique et géométrique à l'égard du raisonnement mathématique :

> *"L'algèbre est un langage universel... Que la science géométrique ait été inventée en premier est à proprement parler une circonstance accidentelle"* (Woodhouse, 1802, 87-89).

Du même coup, il présuppose l'existence d'une « logique propre des opérations », seule susceptible de légitimer les résultats obtenus, et qu'il propose de substituer à l'usage heuristique de l'analogie pour légitimer les procédures opératoires, préférant la notation d'Arbogast à celles de Newton et de Leibniz, puisqu'elle élimine le caractère fractionnaire de l'opérateur différentiel. Si (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd a été démontré pour les nombres dits réels en attachant aux symboles littéraux et aux symboles d'opérations une signification (*meaning*) qui permet de contrôler la certitude de chaque étape de la démonstration, c'est seulement symboliquement, du seul point de vue de la combinaison des symboles, qu'on peut écrire :

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = ac+ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} - bd$$

Reprenant la conception lockéenne sur la nature de la démonstration, Woodhouse revendique comme gage de rationalité le caractère artificiel de ces inventions humaines que sont les symboles :

> *Je (suis) convaincu pour ma part, qu'il ne peut y avoir ni paradoxes ni mystères intrinsèques et inexplicables dans un système de caractères de notre propre invention, et combinés selon des règles dont nous pouvons préciser l'origine et la validité... La démonstration devrait être définie comme une méthode consistant à montrer la cohérence d'idées éloignées par une suite d'idées intermédiaires, chacune s'accordant avec la suivante; autrement dit, une méthode consistant à tracer le lien entre certains principes et une conclusion, par une suite de propositions intermédiaires et identiques, chaque proposition étant convertie en la suivante, en changeant la combinaison des signes qui la représente, en une autre dont on montre ainsi qu'elle lui est équivalente.* (Woodhouse, 1801, 93, 107).

En 1813, la préface des *Memoirs of the Analytical Society,* s'inscrivant dans la recherche d'une théorie de l'invention, reprend elle aussi le vocabulaire de Locke tout en se réclamant de Lord Francis Bacon (1560-1626) :

> *Observer attentivement les opérations de l'esprit dans la découverte de nouvelles vérités, et retenir en même temps ces liens fugitifs, qui fournissent une connexion momentanée avec des idées éloignées, dont on déduit la connaissance de leur existence plutôt à partir de la raison que de la perception, sont les objets à la poursuite desquelles on ne peut espérer le succès que grâce à la plus patiente persévérance. Quoi qu'il en soit, l'esprit doit être puissant, qui peut conduire simultanément ces deux processus, dont chacun requiert l'attention la plus soutenue. Cependant, ces obstacles doivent être surmontés, avant que nous puissions espérer la découverte d'une théorie philosophique de l'invention, une science que Lord Bacon considérait comme totalement déficiente il y a deux siècles, et qui n'a fait depuis que de légères avancées* (Babbage, 1989, 1, 59).

Bacon est à cette époque plus volontiers convoqué explicitement que Locke dont la philosophie est alors soupçonnée d'ouvrir la voie au scepticisme. Cette double référence, explicite pour Bacon et implicite pour Locke, témoigne du souci des algébristes de Cambridge d'intégrer à l'algèbre comme science ces résultats obtenus empiriquement. Cette réflexion sur l'heuristique algébrique participe tout autant de la critique des examens à Cambridge — trop attachés à la restitution compétitive d'exercices-types — que de la volonté de sortir de la stagnation dont souffrent les mathématiques en Angleterre face aux développements continentaux. Il n'est plus temps d'en rejeter la cause sur la querelle de priorité qui opposa Newton et Leibniz un siècle plus tôt. Il est urgent d'approfondir l'analyse du phénomène, et de trouver des remèdes.

Dès sa création, les travaux de *The Analytical Society* sont nourris par la recherche que mènent déjà Babbage et John F.W. Herschel (1792-1871) à partir des travaux continentaux, notamment ceux de Lagrange et de Laplace. Leur réflexion sur la notation est marquée, sur le plan de la recherche, par deux mémoires fondateurs de Babbage sur le calcul fonctionnel [Babbage, 1815], et dans le domaine de l'enseignement, par la traduction collective, avec Herschel et Peacock, du *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et Intégral* de Lacroix en 1816, et par la publication de trois volumes d'exemples respectivement rédigés par Babbage, Herschel et Peacock en 1820, qui visent et réussissent à imposer l'adoption de la notation leibnizienne du calcul infinitésimal dans les examens à Cambridge.

Le même trio poursuit ce travail de réflexion sur le rôle du symbolisme algébrique au cours des années 1820. Babbage rédige un ouvrage inachevé et non publié, *The Philosophy of Analysis,* dans lequel il mène une étude systématique de l'heuristique algébrique, portant une attention toute particulière à l'analogie, l'induction et la généralisation, dont il discute également dans sa correspondance avec Herschel et Peacock. Initialement conçu comme une suite d'Essais destinés à la “Cambridge Philosophical Society”, ce document lui servira de base de travail pour la publication, dans cette décennie, de plusieurs articles aux titres significatifs de sa recherche d'une théorie de l'invention (Babbage, 1817, 1822, 1823, 1827, 1830). Il s'agit de se démarquer de philosophie de David Hume (1711-76), et de légitimer les conditions du passage des vérités probables aux vérités nécessaires. Babbage se défend de toute tentative d'expliquer la nature de la faculté d'invention et s'appuie au contraire sur l'analyse de ses manifestations, nourrie des travaux des mathématiciens et de l'examen des opérations de son propre esprit. Sa réflexion est toute entière tendue (Babbage, ss d., 50-52, 58) entre ces «jaillissements secrets de la pensée», dont rend compte Leonhard Euler (1707-83) dans la plupart de ses travaux, et l'approche plus formelle de Lagrange dans sa recherche «des principes du calcul différentiel, dégagés de cette considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies» (Lagrange, 1797, IX). Comme Woodhouse (Woodhouse, 1803, xii-xvii), Babbage prend au sérieux l'objection de George Berkeley (1685-1753) reprochant à Newton de modifier ses hypothèses au cours du raisonnement (Berkeley, 1996, 186). Son but avoué est de généraliser le calcul infinitésimal en le détachant des applications dont Newton et Leibniz n'avaient su s'abstraire ni l'un ni l'autre, un fait qui témoigne pour Babbage de l'indépendance de leurs découvertes (Babbage, s. d., 42 v-50).

En ce qui concerne les méthodes qui sous-tendent l'invention, Babbage distingue soigneusement entre d'un côté, l'induction, et de l'autre, l'analogie et la généralisation. Pour ce qui concerne l'induction, il distingue entre les acceptions de ce terme en philosophie naturelle et en mathématiques, et souligne les erreurs auxquelles elle a donné lieu dans ce domaine en ne s'appuyant que sur quelques cas. Il met alors en place la structure de récurrence sur des exemples de théorie des nombres, notamment sur le théorème du binôme (Babbage, s. d., 57).

L'analogie ouvre la voie à la généralisation dans le processus si problématique d'extension des opérations, consubstantiel à l'existence de l'algèbre. C'est la généralité même des opérations que Babbage cherche à expliciter, en les distinguant radicalement des découvertes concernant la physique du monde, autrement dit de ses applications.

> *Dès son invention, l'Algèbre paraît n'avoir guère plus consisté qu'à employer une lettre pour représenter un nombre à déterminer à partir des conditions du problème.. La substitution de lettres pour représenter des nombres connus fut la grande étape suivante... Descartes a étendu à l'espace cet empire que l'algèbre exerce alors sur le nombre .... La représentation du temps et de la force au moyen de lettres, et l'application de l'algèbre à la mécanique, à l'optique, et aux autres parties de la philosophie naturelle a suivi avec peu d'efforts dès lors que la route a été ouverte ...*
>
> *Ainsi les lettres dont la signification a d'abord été restreinte au pur nombre ont progressivement acquis d'autres significations secondaires, et dans différentes situations.... De ce fait, les définitions qui ont été formées pour les symboles quand ils se référaient seulement aux nombres introduisent des difficultés qui n'avaient pas été prévues, lorsqu'il est nécessaire de les interpréter dans d'autres circonstances....*
>
> *La cause qui a surtout contribué à adapter ainsi le langage des signes peut être trouvée dans cette circonstance qu'étant elle-même une méthode de raisonnement d'une extrême généralité, l'algèbre a été découverte au moyen de l'une de ses applications particulières, celle qui concerne les nombres ...*
>
> *Ce que je propose de tenter est de séparer entièrement l'analyse ou le langage des signes de toutes ses diverses applications, en en rejetant non seulement les considérations géométriques mais aussi celles de nombre, et de montrer que, quand on l'examine de cette façon, (cette analyse) se résout elle-même en propositions qui sont purement identiques, ou au moins que la signification de toute équation ne correspond à rien d'autre qu'à écrire que, lorsque toutes les opérations indiquées de chaque côté sont effectuées, toute lettre qui intervient d'un côté interviendra aussi de l'autre côté, précisément dans les mêmes circonstances.....*
>
> *(Avec) ce point de vue sur l'analyse,.... les difficultés qui appartiennent naturellement à ses différentes applications disparaissent du langage des signes, et sont renvoyées à leur véritable place* (Babbage, ss d., 41-44).

La solution envisagée par Babbage pour son projet d'extension du calcul est déjà de séparer radicalement le langage des signes de toutes ses applications. Cette affirmation ne concerne plus seulement, comme chez Woodhouse, la séparation entre géométrie et algèbre, mais bien plutôt la séparation entre procédures opératoires et applications numériques. C'est cette généralité des opérations de la langue des signes qui peut à nouveau jouer comme gage de permanence, puisqu'elle est fondée sur le principe d'identité algébrique, principe distinct de l'égalité numérique, et qui ne concerne plus que l'équivalence des opérations. Une ambiguïté cependant demeure, portée par son vocabulaire : Babbage persiste à se méfier de l'utilisation des séries infinies, et envisage cette abstraction de l'analyse à la fois comme légitimation et comme extension des opérations courantes. Il s'attache à l'analyse de l'invention, là où Peacock interviendra en législateur, parlant d'Algèbre Symbolique, fondant une discipline dont l'objet («the business of algebra») est l'explicitation des équivalences entre formes générales. Pour ce faire, il s'appuiera sur la convergence entre la démarche de Babbage et la conception développée par Locke dans son *Essay on Human Understanding,* qui met au premier plan l'abandon de la référence à la substance, le caractère fondamental de l'expérience pour une connaissance devenue action, l'importance de la combinaison des idées et des mots dans l'organisation de cette connaissance, et sur l'arbitraire du signe. La philosophie de Locke va servir à légitimer philosophiquement la séparation entre un symbolisme algébrique strictement opératoire et la signification des calculs.

La philosophie de Locke

Connaissance, action et distanciation du réel

Hobbes et Leibniz sont aujourd'hui beaucoup plus souvent cités que Locke comme références philosophiques ayant nourri la pensée des pionniers de l'informatique ou de l'intelligence artificielle. Hobbes, il est vrai, dans son *Léviathan* (1651), assimile la raison au calcul :

> *Nous pouvons définir, c'est-à-dire déterminer, ce qu'on entend par ce mot de raison quand on compte celle-ci au nombre des facultés de l'esprit. En effet, dans ce sens, la RAISON n'est que le calcul (c'est-à-dire l'addition et la soustraction) des conséquences des dénominations générales dont nous avons convenu pour noter et signifier nos pensées : pour les noter, dis-je, quand nous calculons à part nous ; et pour les signifier, quand nous démontrons, quand nous prouvons à autrui nos calculs* (Hobbes, 1971, 39).

C'est cette métaphore par laquelle Hobbes s'inscrit effectivement dans une analyse du langage portant sur son aspect discursif, linéaire, marquant l'inscription du discours dans le temps, qui permet à Hubert Dreyfus de le citer comme « le premier à exprimer clairement cette conception syntaxique de la pensée perçue comme un calcul » (Dreyfus, 1984, 5). Mais les algébristes anglais n'y font pas référence. S'ils connaissent Leibniz, ce n'est pas pour son projet de caractéristique universelle, dont les textes sont alors inédits, mais bien davantage comme co-fondateur du calcul infinitésimal avec Newton, et auteur de remarques sur l'analogie entre puissance d'une somme et différentielle d'un produit (Babbage, s. d., 64). Dans les *Elements of the Philosophy of Human Mind* de Stewart, que Babbage a étudié très tôt avant de rencontrer personnellement leur auteur[2], le nom de Leibniz est étroitement associé à celui d'Etienne de Condillac (1714-1780), dont Stewart entreprend la critique pour mieux soutenir la philosophie de Locke. Les références à Locke abondent dans tous les débats qui agitent l'Angleterre au sujet des fondements de la connaissance certaine. Son *Essay on Human Understanding,* qui fait partie de la formation des étudiants de Cambridge depuis 1729, est constitutif du fonds culturel de

[2] Babbage s'y réfère dans une lettre à Stewart (Babbage Papers, Add. Mss. 37 182 f 164, lettre de Babbage à Stewart du 25 août 1819). Il cherche dès 1814 à se procurer *La Langue des Calculs* de Condillac (Babbage Papers, Add. Mss. 37 182 f 26, lettre de Slegg à Babbage du 4 février 1814), qui se trouve dans la bibliothèque de Peacock (Peacock, 1858).

l'Université (Durand, 1990). Et les références les plus systématiques de nos auteurs vont d'abord à Bacon et Locke[3].

Envisager comme prépondérantes l'influence de Hobbes ou de Leibniz dans ce domaine participe donc d'une histoire des idées qui fait fi de l'histoire, et qui ne permet pas de comprendre pourquoi un tel courant de pensée ne s'est pas développé en France plutôt qu'en Angleterre, puisque ces travaux anglais prolongent des thèmes de recherche antérieurement présents sur le Continent et qui, paradoxalement, ne s'y développeront pas (Koppelman, 1969, 1-45).

Si les débats généraux sur les rôles respectifs que doivent jouer l'induction et la déduction dans la méthodologie des sciences renvoient à la philosophie de Bacon, c'est bien la philosophie de Locke qui, dans le style et la structuration de leurs travaux, sous-tend la façon dont les acteurs de l'Ecole Algébrique Anglaise tranchent cette question, dans le domaine spécifique des mathématiques et de la logique. La théorie de la connaissance de Locke, et sa conception du langage se présentent comme pertinentes pour ce propos. C'est sa conception de l'arbitraire du signe, des opérations de l'esprit, de la vérité et de la démonstration, qui leur permet d'étayer la distinction entre équivalence symbolique et égalité numérique en algèbre, ainsi qu'entre vérité nécessaire ou formelle et vérité contingente dans les démonstrations, autrement dit entre cohérence logique et vérité.

Réfutant l'innéisme, Locke rompt d'emblée avec la visée contemplative de la connaissance, et installe le sujet épistémique au coeur de l'acte de connaître. En même temps, il renonce à concevoir la connaissance comme reflet du monde des choses pour la situer dans l'entendement. Elle est fondée sur des perceptions qui sont à la fois sensations (perceptions des objets extérieurs) et réflexions (perceptions des objets intérieurs). Ces perceptions produisent des idées simples selon un processus sur lequel Locke, n'étant ni naturaliste ni physicien, ne se réfère qu'en usant de la métaphore de la *camera obscura* (Locke, 1690, II.2.2).

Locke soumet l'élaboration de l'ensemble des idées à une analyse génétique, dont les idées simples constituent le matériau, et les opérations de l'esprit le mode opératoire. L'entendement agit sur ces idées simples pour produire, par combinaison, des idées complexes. Elles reposent sur sept facultés qui, elles, sont innées[4], parmi lesquelles l'usage des signes et l'abstraction. Locke ne se prononce pas sur la nature des idées dont il traite sur un plan strictement épistémologique, et non ontologique (Duchesneau, 1973, 195), et qu'il situe donc dans un univers sémiotique qui lui permet de fonder sa théorie de la connaissance sur celle du langage.

Ce langage ne signifie donc pas directement la réalité, mais l'expérience qui en est faite (Locke, 1690, II.2.22). Ce qui conduit Locke à réinterroger la distinction entre connaissance, certitude et vérité, et à donner aux mathématiques, dans ce contexte, une place spécifique. Parce que les mots n'ont de signification qu'en tant qu'ils sont les marques des idées, les signes extérieurs des conceptions intérieures (Locke, 1690, III.1.2), cette signification est marquée par l'arbitraire du signe. C'est dans la mesure où un mot ne peut désigner qu'une essence nominale, et non une essence réelle, que celle-ci demeure

[3] Boole s'y réfère dès la première page de son *An Investigation on the Laws of Thought.*

[4] Ce sont, dans l'ordre : la perception, la rétention, le discernement (jugement), la comparaison, la composition (dont l'extension), l'usage des signes, et l'abstraction (généralisation).

inconnaissable pour les substances, et que le domaine des sciences spéculatives se trouve radicalement séparé du domaine des sciences expérimentales. C'est seulement pour les idées générales et abstraites, comme celles des mathématiques, qu'essence nominale et essence réelle sont confondues.

La certitude de la connaissance reste, chez Locke, référée à la lumière éclatante. Elle est avant tout clarté et évidence. A défaut de cette intuition, la connaissance démonstrative introduit entre deux idées dont la relation n'est pas immédiate, une suite d'idées moyennes ou intermédiaires appelées preuves entre lesquelles peut s'exercer la connaissance intuitive, donc certaine (Locke, 1690, IV.1.9). Dans ce contexte, la Vérité n'appartient en propre qu'aux Propositions, qui sont des complexes de signes. Elle-même n'est encore générale que dans le seul cas où l'essence nominale est confondue avec l'essence réelle, c'est-à-dire dans le cas des idées générales et abstraites (Locke, 1690, IV.6.13-16). De ce point de vue, il est donc cohérent que les mathématiques, connaissance démonstrative par excellence, occupent un statut privilégié puisque leurs idées, dont l'essence nominale se confond avec l'essence réelle, correspondent *stricto sensu* aux canons de la connaissance certaine, comme à ceux de la connaissance réelle[5]. Quant aux principes ou maximes, dont Locke ne peut nier l'existence en mathématiques, ils n'y interviennent qu'à des fins pédagogiques, pour éviter de reprendre à tout coup les étapes de leur élaboration. En tant que règles générales, ils sont nécessairement formés *a posteriori* par l'esprit (Locke, 1690, IV.12.2).

Locke n'érige pas seulement les mathématiques en modèle pour les jugements de science, il investit spécifiquement l'Algèbre d'un considérable potentiel d'expansion des connaissances (Duchesneau, I973, 185). Il fonde explicitement l'espoir de gagner d'autres domaines de la philosophie à la connaissance démonstrative, notamment celui des vérités morales qui relèvent elles aussi d'idées générales forgées uniquement par l'esprit, et que Locke voudrait élever au rang des « Sciences capables de Démonstration ».

> *Ceux qui ignorent l'Algèbre ne sauraient se figurer les choses étonnantes qu'on peut faire en ce genre par le moyen de cette Science* (Locke, 1983, IV.3.18)
>
> *Qui sait si pour étendre nos connaissances dans les autres Sciences, on n'inventera point un jour quelque Méthode qui soit du même usage que l'Algèbre dans les Mathématiques* (Locke, 1983, IV.12.15).
>
> *La connaissance des Vérités Morales est aussi capable d'une certitude réelle que celle des Vérités mathématiques; car la certitude n'étant que la perception de la convenance ou de la disconvenance de nos idées, & la démonstration n'étant autre chose que la perception de cette convenance par l'intervention d'autres idées moyennes, comme nos idées morales sont elles-mêmes des archétypes aussi bien que les idées mathématiques et qu'ainsi ce sont des idées complètes, toute la convenance ou la disconvenance que nous découvrirons entr'elles produira une connaissance réelle, aussi bien que dans les Figures mathématiques* (Locke, 1983, IV.4.7).

[5] Sont en effet considérées comme réelles les idées qui sont conformes à leurs archétypes, ce qui est le cas des idées simples, des idées complexes de modes et de relations, mais non des idées de substances (Michaud, 1986, 130).

Locke, concluant son *Essai* par un court chapitre sur la classification des sciences, s'appuie sur les trois catégories d'objets auxquels l'Entendement puisse appliquer ses pensées : la physique ou philosophie naturelle, la morale, et la logique[6]. La logique y devient sémiotique, au sens d'une connaissance des signes qui concerne aussi bien les idées comme signes ou représentations des choses, que les mots comme signes des idées.

Si la pensée est avant tout action, et non essence de l'âme (Locke, 1690, II.1.10; II.19.4), elle met cependant en œuvre des facultés innées, qui se manifestent par les opérations de l'esprit. La notion d'opération chez Locke se substitue à celle de mouvement chez Aristote, dans une perspective où la pensée est à l'âme ce que le mouvement est désormais au corps, et dont la physique née au XVII[ème] siècle assure le contrôle (Locke, 1690, II.9.6). Partant, Locke aborde, relativement à ces opérations de l'esprit, la distinction fondamentale, qui reste problématique au début du XIX[ème] siècle (Locke, 1690, II.1.4), entre :

– la faculté de l'esprit conçue comme capacité, possibilité d'agir, comme opération en puissance,

– la mise en acte de cette faculté, c'est-à-dire l'opération elle-même, en tant que processus ou action,

– et l'idée elle-même, c'est-à-dire l'action produite, le résultat de l'opération.

C'est cette distinction en trois concepts différents, et le caractère instrumental de la pensée qu'elle induit, qui alimente les débats sur la nature de la logique et des mathématiques dans la première moitié du XIX[e] siècle. Ainsi le philosophe William Hamilton (1788-1856) attribue le déclin de la logique en Grande Bretagne à la philosophie de Locke, et juge réductrice la conception de Whately, qui reprend cette distinction relative aux opérations de l'esprit en insistant sur le fait que les procédures logiques sont indépendantes des résultats :

> *La Logique considère la Pensée, non pas comme l'opération de penser, mais comme son produit; elle ne traite pas de la Conception, du Jugement, et du Raisonnement, mais des Concepts, des Jugements, et des Raisonnements.... Whately, ..., parmi d'autres erreurs dans sa détermination de l'objet de la Logique, confond ou inverse ces deux aspects; car il propose à la Logique, non pas la pensée considérée comme un produit, mais seulement le raisonnement, lui-même considéré en tant qu'opération productrice. Il confond ainsi la Logique avec la Psychologie des Phénomènes* (Hamilton W., 1860, 73-74).

Mais, et c'est là une difficulté plus sensible au XX[ème] siècle que pour les contemporains de Locke : sa philosophie laisse en suspens la question des rapports entre intelligibilité du réel et rationalité de la connaissance. Elle est d'ailleurs contestée du fait qu'elle ouvre ainsi la voie à la possibilité d'un scepticisme qui ne se trouve modéré chez Locke lui-même que par la réaffirmation d'une conception finaliste des idées (Duchesneau, 1973, 119). Pour Locke

---

[6] La connaissance des choses concerne la Physique ou philosophie Naturelle, elle ne peut s'appuyer que sur des hypothèses qui n'ont que valeur de probabilité, puisque l'Entendement ne peut appréhender que leurs effets phénoménaux. La connaissance des actions de l'Entendement concerne la Morale. Elle est une connaissance pratique puisqu'elle a pour objet d'élaborer les règles de la conduite humaine en vue du bonheur. Elles sont aujourd'hui les éléments qui servent à définir la connaissance vraie, qui suppose selon Piaget : des objets de connaissance, un sujet connaissant ou sujet épistémique, et des relations de connaissance (Piaget, 1967, 3)

comme pour ceux qui s'en réclameront, le but ultime de toute connaissance reste la connaissance de Dieu, via le monde qu'il a créé.

> *La principale de toutes nos pensées, et la véritable occupation de tout être doué d'entendement, c'est la connaissance et l'adoration de cet Etre Suprême (le Souverain Conducteur)* (Locke, 1690, II.7.6).

Ce sont ces conceptions de Locke d'une connaissance construite dans l'action, fondée sur l'expérience et sur les opérations de l'esprit, d'une démonstration fondée essentiellement sur sa cohérence interne, et plus encore d'une séparation entre potentialité, procédure et résultat de l'opération algébrique, qui sous-tendent les affirmations de Woodhouse sur la nature de la démonstration et la logique propre des opérations. Ce sont elles qui se trouvent retravaillées par les Algébristes de l'École Anglaise. L'approche génétique chère à Locke du mode d'élaboration des connaissances sera de ce fait préférée à toute présentation axiomatique de leur travail. Chez Peacock comme chez Locke, les principes interviennent *a posteriori,* puisque les formes générales ne sauraient être premières. Leur conception d'une analyse gouvernée comme un langage des signes tire les mathématiques du côté de la logique selon Locke. Et c'est en insistant bien plus que lui sur la naturalité des opérations de l'esprit, que sera soutenue la conviction de l'universalité des formes générales, permettant d'affirmer la subordination de l'expérience et de ses acteurs au travail de théorisation des savants les plus éminents.

L'ALGÈBRE SYMBOLIQUE DE PEACOCK

Dès la création de *The Analytical Society,* Peacock est en relation épistolaire régulière avec Babbage et Herschel, au sujet de leurs projets de publications et d'interventions dans la restructuration du champ scientifique à l'université et dans les sociétés savantes. Ce n'est donc pas par assimilation inconsciente (Dubbey, 1978, 100-07) mais bien en raison de cette recherche commune de la logique propre des opérations affirmée par Woodhouse, que certains des exemples analysés par Babbage se retrouvent dans le travail de Peacock. Le point de vue change cependant. Il donne forme théorique à cette recherche et introduit une rupture épistémologique qui permettra à ses successeurs de développer toutes les potentialités du calcul général envisagé par Babbage, sans plus s'interroger sur l'existence d'une référence signifiante, mais en fondant sa légitimité sur la formulation symbolique de ses propriétés opératoires.

Le statut de l'Algèbre Symbolique théorise cette distinction alors problématique entre les différents stades du processus opératoire. Il correspond à l'explicitation des procédures elles-mêmes, conçues à partir de leurs propriétés spécifiques indépendamment des données et des techniques opératoires. Légitimant la primauté ontologique, mais non historiquement chronologique, du déductif sur l'inductif, Peacock conçoit comme distinctes trois étapes dans la structuration de l'algèbre :

– l'arithmétique, science du quantitatif, comprenant toutes les sciences qui sont réductibles à la mesure et au nombre, à laquelle il a déjà consacré, en 1826, une étude historique et encyclopédique particulièrement érudite, insistant sur l'ancrage du système décimal, dans toutes les cultures examinées, sur l'expérience de la structure du corps humain,

– l'algèbre arithmétique, ou science de suggestion, qui apporte rigueur au stade empirique de la découverte : bien que ses symboles soient généraux, c'est-à-dire littéraux, sa logique opératoire présuppose qu'ils restent porteurs de limitations contingentes relatives aux conditions de leur intervention, puisque les définitions des opérations y restent celles de l'arithmétique,

– enfin, l'Algèbre Symbolique, présentée comme le langage du raisonnement symbolique, dont la logique propre s'exprime par un système de lois purement formelles. Elle œuvre comme « système de combinaisons de symboles arbitraires », « généraux dans leur forme comme dans leur valeur », dont les processus opératoires sont réglés par leurs propriétés, indépendamment de toute interprétation (Peacock, 1833, 208).

Contrairement à Babbage, Peacock rejette l'analogie en tant que légitimation possible des plus récents acquis de l'algèbre (Peacock, 1830, 108). Il refuse, de ce fait, de considérer l'Algèbre Symbolique comme une généralisation de l'algèbre arithmétique ou une extension du calcul et la pose comme logiquement première. Excluant les définitions arithmétiques du champ de l'algèbre, Peacock en exclut du même coup toute interprétation, qui ne concerne pas cette science, et doit désormais suivre plutôt que précéder les opérations. La validité des raisonnements ne saurait donc en dépendre.

> *C'est un abus du terme généralisation que de l'appliquer pour désigner le processus de l'esprit par lequel nous passons du sens de <u>a-b</u>, lorsque <u>a</u> est plus grand que <u>b</u>, à son sens lors que <u>a</u> est plus petit que <u>b</u>, ou bien du sens du produit <u>ab</u>, quand <u>a</u> et <u>b</u> sont des nombres abstraits, à son sens lorsque <u>a</u> et <u>b</u> ont des nombres concrets d'espèce identique ou différente, et il en est de même dans chaque cas où un résultat est soit obtenu soit expliqué, sans qu'aucune définition ou explication préalable puisse être donnée de l'opération dont il dépend : et même si nous pouvons garantir la légitimité de telles généralisations, nous arrivons de fait nécessairement à une nouvelle science beaucoup plus générale que l'arithmétique, dont les principes, bien qu'ils en soient déduits, peuvent être considérés comme le fondement immédiat, sinon ultime, de ce système de combinaisons de symboles qui constitue la science de l'algèbre. Il est donc plus naturel et philosophique, de supposer de tels principes comme indépendants et ultimes, en ce qui concerne cette science elle-même, quelle que soit la façon dont ils ont pu être suggérés, e telle sorte qu'elle devienne ainsi essentiellement une science de symboles et de leurs combinaisons construite sur ses propres règles, qui puisse être appliquée à l'arithmétique et à toutes les autres sciences par interprétation : ainsi, l'interprétation suivra, et ne précédera pas, les opérations de l'algèbre et leurs résultats ; un ordre de succession qu'un très rapide examen de leurs nécessaires changements de sens, qui correspondent aux changements dans les valeurs et les applications spécifiques des symboles, doit rendre très rapidement manifeste.*
>
> *Mais, bien que la science de l'arithmétique, ou de l'algèbre arithmétique, ne fournisse pas un fondement adéquat à la science de l'algèbre symbolique, elle en suggère nécessairement les principes, ou plutôt les lois de combinaisons, car puisque l'algèbre symbolique, si elle est arbitraire quant à l'autorité de ses principes, ainsi que d'autres sciences, il est évident que leurs règles doivent être identiques, là où ces sciences procèdent en commun : la distinction réelle*

> *entre elles provient de la supposition ou de l'hypothèse selon laquelle les symboles de l'algèbre symbolique sont parfaitement généraux et illimités à la fois dans leur valeur et dans leur représentation, et que les opérations auxquelles ils sont soumis sont également générales*. (Peacock, 1833, 194).

Puisqu'aucune interprétation ne vient plus légitimer le fonctionnement des opérations, Peacock met en avant leurs propriétés combinatoires, certes empruntées aux propriétés des opérations portant sur les réels, mais envisagées pour toute opération possédant ces mêmes propriétés. C'est le premier pas vers l'explicitation des propriétés d'un corps :

> *Les opérations appelées addition et soustraction sont désignées par les signes + et –. Elles sont inverses l'une de l'autre.*
>
> *Dans la concurrence des signes + et -, quelle que soit la manière dont ils sont utilisés, si deux signes se suivent, qu'ils soient + et +, ou - et -, ils sont remplacés par le signe +; et quand deux signes différents se suivent, qu'ils soient + et -, ou - et +, ils sont remplacés par le seul signe -.*
>
> *Quand différentes opérations sont effectuées ou indiquées, l'ordre dans lequel elles se succèdent est indifférent.*
>
> *Les opérations appelées multiplication et division sont désignées par les signes x et ÷, ou plus fréquemment par une position conventionnelle des quantités ou des symboles les uns par rapport aux autres.*
>
> *Les opérations de multiplication et de division sont inverses l'une de l'autre.*
>
> *Dans la concurrence des signes + et - dans la multiplication ou la division, si deux signes se suivent, qu'ils soient + et +, ou - et -, ils sont remplacés par le seul signe +; et quand deux signes différents se suivent, qu'ils soient + et -, ou - et +, ils sont remplacés par le seul signe -.*
>
> *Quand différentes opérations se succèdent, l'ordre dans lequel elles sont effectuées n'est pas indifférent.* (Peacock, 1833, 196-97).

Cette algèbre symbolique porte ainsi au premier plan le caractère combinatoire et algorithmique d'un calcul qui travaille aussi bien sur des polynômes finis que sur des séries formelles, directement issues de pratiques opératoires comme celle de la division des polynômes. Non seulement Peacock n'a aucune méfiance envers les séries infinies, mais pour lui, le fini reste un cas particulier de l'infini et ne saurait le légitimer. C'est là un aspect qui l'éloigne du Babbage des années 1820, et des tentatives de construction effective des ensembles numériques, telles qu'elles sont envisagées par son contemporain Martin Ohm (1792-1872), et plus tard par Karl T. W. Weierstrass (1825-1897), Georg Cantor (1845-1918) ou J. W. Richard Dedekind (1831-1916). Le travail des algébristes anglais porte effectivement sur le calcul des opérations.

Pourtant, réformateur convaincu que la pensée est action, Peacock ne saurait fonder l'accès à ce « langage du raisonnement symbolique » universel que sur l'expérience. C'est pourquoi il n'envisage pas ici d'autres lois opératoires que celles de la pratique arithmétique[7]. Et le double énoncé du «principe de permanence des formes équivalentes», qui garantit les conditions du transfert

[7] C'est là une limitation que sauront lever ses successeurs.

systématique des égalités numériques de l'algèbre arithmétique aux équivalences des formes générales de l'algèbre symbolique, traduit en même temps toute l'ambiguïté du travail de Peacock, qui ne peut être levée qu'en intégrant à sa réflexion les présupposés philosophiques de Locke concernant la naturalité des opérations de l'esprit :

> *(A) : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent.*
>
> *(B) : Toute forme qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme* (Peacock, 1833, 194).

Cette ambiguïté est constitutive de la démarche de Peacock, qui cherche à concilier approche génétique et conception finaliste de la connaissance (Durand, 1990, 166-77). Pour lui comme pour Locke, la vérité n'appartient en propre qu'aux propositions, et à leurs relations. Elle n'est universelle que dans le cas des idées abstraites, dont les lois de l'algèbre symbolique ainsi définie font partie. Et le travail de combinaison des signes relève des opérations de l'esprit. Ainsi, l'énoncé (A) du principe de permanence revient à présupposer la naturalité de lois opératoires universelles. Ceci posé, l'énoncé (B) soumet effectivement l'inductif au déductif en indiquant les modalités de la découverte de ces lois préexistantes. Il affirme la primauté des opérations de l'esprit sur l'observation des résultats, et maintient une stricte hiérarchie entre les deux disciplines, où l'Algèbre Symbolique domine une Algèbre Arithmétique qui témoigne de l'approche historico-génétique. L'analogie reste trop marquée du sceau de la probabilité subjective[8] pour intervenir autrement que comme suggestion ou dévoilement des lois symboliques qui sont les manifestations phénoménales des opérations de la raison. Leur légitimation formelle met à profit l'héritage de Locke pour abandonner la référence directe à une essence réelle des objets, sans renoncer cependant à un fondement ontologique des opérations.

La prise en compte de cet ancrage philosophique permet d'apercevoir que, pas plus chez Peacock que chez Locke, il n'y a véritablement abandon de toute référence au sens. Certes, les symboles sont arbitraires, la signification des lois de combinaison n'est plus attachée ni à leur dénomination, ni à leur définition arithmétique traditionnelle, mais les opérations de l'Algèbre Symbolique, elles,

8 Locke donne de la probabilité un ensemble de déterminations régies par les degrés d'assentiment du sujet, et affirme que, pour ce qui concerne, entre autres, "la manière d'opérer dans la plupart des parties des Ouvrages de la Nature, l'analogie est la grande règle de la Probabilité" (Locke, 1690, IV.16.12). Pour sa part, Peacock, dans son histoire de l'Arithmétique, se démarque de l'analogie en ces termes : "Le repérage d'analogies, telles que les précédentes, tel qu'il peut être généralement observé chez les philosophes de l'Antiquité, avec des illustrations morales d'une élégance et d'une beauté peu communes, peut être considéré comme fournissant un exemple d'exercice au moins plaisant, si ce n'est utile, de l'entendement ; mais dans d'autres cas, les analogies sont utilisées comme preuves, et supposées comme les bases des théories les plus inconsistantes et les plus absurdes ; et il serait difficile de se référer à un chapitre de l'histoire de l'esprit humain qui offre un tableau plus dégradant des facultés de raisonnement, que celui fourni par les délires des philosophes pythagoriciens au sujet des nombres et de leurs propriétés" (Peacock, 1845, 423)

se réfèrent à des facultés qui organisent les combinaisons opératoires, et qui en garantissent la préexistence logique potentielle précisément parce qu'elles sont innées. Peacock tente ainsi d'harmoniser le respect du sens, fondé sur une ontologie finaliste de l'universalité du symbolisme, et l'automatisme des pratiques opératoires. L'Algèbre Symbolique se veut proprement une algèbre de l'universel, au sens où elle est destinée à légitimer *in abstracto,* la nécessité déductive de toutes les procédures de raisonnement mathématique, tant du côté de la démarche inventive que du côté de l'activité démonstrative.

L'ambition de l'École Algébrique Anglaise participe ainsi d'une révolution symbolique essentielle, de dimension à la fois conceptuelle et idéologique, où, le calcul portant désormais sur les opérations elles-mêmes, l'opératoire prend le pas sur la structuration de l'espace et du mouvement comme fondement des mathématiques et représentation de l'action. En séparant ainsi deux modes de caractérisation de la vérité, selon qu'elle relève de la pure logique opératoire ou de l'interprétation des résultats, Peacock déplace radicalement la ligne de partage entre mathématiques et logique, et tous ses successeurs s'inscriront dans cette problématique[9]. Mais, prisonnier de sa conception génético-finaliste de la science, il ne saurait assumer jusqu'au bout la voie constructiviste dans laquelle il s'engage : les principes qu'élabore le mathématicien restent expressément soumis aux présupposés de l'existence d'opérations de l'esprit régissant toute expérience. S'il installe une rupture épistémologique fondamentale entre vérité nécessaire — seule susceptible d'une certitude logique — et vérité contingente — relevant de l'interprétation — Peacock évite celle qui lui permettrait d'assumer la liberté du mathématicien comme créateur d'un langage formel.

BABBAGE : DE LA DIVISION DU TRAVAIL MANUEL À LA DIVISION DU TRAVAIL MENTAL

Cette distinction entre procédure opératoire et interprétation, conceptuellement explicitée par Peacock, va l'être matériellement par Babbage, à partir d'une analyse de la décomposition des opérations qui joue sur la polysémie de ce terme. Babbage s'appuie sur le parallélisme dégagé par Locke entre la pensée comme opération de l'esprit et le mouvement comme opération du corps, pour appliquer en toute conscience le principe de la division du travail au travail mental aussi bien qu'au travail manuel, en ce que l'un et l'autre sont traités comme mouvement au sens aristotélicien du terme, c'est-à-dire comme changement ou transformation. En même temps qu'il approfondit son étude d'une théorie de l'invention, il mène de front, dès 1819, la préparation de sa remarquable étude du monde industriel, *On the Economy of Machines and Manufactures*, publiée en 1832, et la construction de la machine aux différences, qui va déboucher, à partir de 1834, sur la conception de la machine analytique. Pour chacun de ces domaines d'intervention, Babbage s'attache à caractériser les différentes étapes du processus opératoire.

On the economy of machines and manufactures

Par ce traité, qui rencontre très vite une large audience[10], Babbage s'engage directement dans le débat politique, et acquiert une réputation de théoricien de

---

[9] Augustus De Morgan (1806-73) par exemple, dont Peacock est le tuteur au Trinity College de Cambridge (1823-27), et qui va participer au mouvement de renouveau de la logique que W. Hamilton qualifiera de Nouvelle Analytique en se référant à Aristote, en souligne le caractère difficile, mais logique (De Morgan, 1835, 310).

[10] Il connaît rapidement plusieurs éditions et traductions (Babbage, 1989*,* 8, viii).

l'économie politique. J.S. Mill (1806-73) et K. Marx (1818-83) s'y référeront directement (Hyman, 1983, 103-04). Edité par le directeur de la très réformiste *Society for the Diffusion of Useful Knowledge,* l'ouvrage paraît l'année même où la Réforme Electorale consacre la reconnaissance politique des nouvelles villes industrielles, et un an après la création de la *British Association for the Advancement of Science,* qui s'appuie sur la science pour réconcilier l'aristocratie traditionnelle et la bourgeoisie montante du côté du pouvoir, en conciliant les approches des “learned men” et des “practical men” (Durand-Richard, 1992, 118 : 7-15). Politiquement proche des Radicaux, Babbage est un acteur essentiel de ce mouvement, et sa réflexion s'inscrit directement dans cette problématique. Son analyse de la manufacture associe systématiquement théorie et pratique, science et habileté. Il affirme dégager les principes économiques de la rationalisation du travail, à l'intention de ceux qui possèdent le pouvoir politique et économique, leur fournissant les éléments d'expertise qui manquent alors cruellement au gouvernement et à l'administration du pays, dont la formation en matière de science correspond davantage à celle du gentleman-amateur héritée du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Loin d'envisager les classes sociales comme antagonistes, Babbage insiste sur le fait que travailleurs et capitalistes partagent les mêmes intérêts, attribuant à chacun la recherche du plus grand profit personnel. Utilité et efficacité sont les maîtres mots d'une analyse menée à partir du principe utilitariste de l'intérêt général et du bonheur du plus grand nombre, qui rencontre sur ce point la conception théologique et morale d'une harmonie naturelle, et recherche l'adéquation des institutions à ces fins. Convaincu que le machinisme fonde la supériorité de l'économie capitaliste, il soutient la libre circulation des biens et des idées pour mieux stigmatiser la spéculation, les monopoles et les secrets du commerce, et présente toutes les mesures possibles d'intégration sociale pour les ouvriers, y compris leur participation aux innovations dans l'entreprise (Babbage, 1989, 8 : chs. 26-30-31). En retour, il réclame l'intervention de l'État pour que le monde industriel puisse bénéficier de l'apport des découvertes scientifiques.

S'il prône la production de masse comme aboutissement de la rationalisation du travail, Babbage apporte une médiation spécifique dans le débat relatif au statut de l'économie politique, quant à trancher sur le fait de savoir s'il s'agit d'une science inductive issue de l'expérience ou d'une science déductive fondée a priori sur des principes abstraits. Visant l'élaboration d'une science exacte et positive, il applique à cette étude la même méthodologie que celle qu'il contribue à élaborer en mathématiques : il fonde les principes économiques, non pas sur une analyse menée *a priori,* mais sur des exemples nombreux et précis, recueillis entre 1819 et 1828 en visitant systématiquement les manufactures des nouvelles grandes villes industrielles. La liberté de commercer et d'entreprendre, l'union entre patron et classe travailleuse, l'utilisation des récentes découvertes de la physique et de la chimie, sont pour lui consubstantielles à la rationalisation du travail, et, plus fondamentalement encore, le recours systématique à la machine et à la division du travail qu'induit le passage de « faire » à « fabriquer », de l'outil à la machine, de l'artisanat à l'industrie. Là encore, Babbage, comme Woodhouse et Peacock avant lui, privilégie la logique sur l'histoire du développement, sa vérité sur son origine. C'est là qu'il effectue un pas supplémentaire, et combien essentiel : il fait intervenir le principe de la division du travail aussi bien pour le travail mental que pour le travail mécanique, et expose sa mise en œuvre dans un chapitre consacré à l'élaboration de sa machine aux différences, qu'il conçoit et construit au même moment. Le travail est ici conceptualisé non seulement comme une relation sociale qui, comme telle, reste fondée sur la morale[11], mais comme action transformatrice. En c'est en ce sens que Babbage peut le concevoir comme opération, c'est-à-dire aussi bien comme mouvement physique, mécanique ou corporel, que comme opération de l'esprit, nommant les ouvriers des agents ou des opérateurs (Babbage, 1989, 8 : 39-41, 128-29). Pour Babbage comme pour Peacock, l'homme ici ne crée rien, il transforme. L'ordre et la stabilité du monde se trouvent ainsi préservés, du fait même que la nouveauté n'est qu'apparence : les lois de transformation, comme celles du mouvement, persistent à assurer la stabilité du monde.

The Difference Engine[12]

Envisagés dès 1820, les premiers travaux effectifs de Babbage sur cette machine coïncident, de fait, avec la création de la *Royal Astronomical Society*. Le discours inaugural fait intervenir explicitement la division du travail pour l'organisation des observations astronomiques sur le territoire. Et Babbage se réfère systématiquement à l'entreprise de Monsieur de Prony, en France, qui, chargé par le gouvernement français, après l'adoption du système décimal, de réaliser de nouvelles tables logarithmiques et trigonométriques pour le grade, division centésimale du cercle, ainsi qu'une table des logarithmes des nombres de 1 à 200 000, avait lui aussi appliqué le principe de la division du travail, tel qu'il fut présenté par A. Smith en 1776, pour concevoir un plan de fabrication[13] utilisant la méthode des différences finies.

La méthode des différences finies consiste à trouver les valeurs d'une fonction pour des valeurs numériques de la variable, irrégulièrement ou régulièrement espacées selon un intervalle donné. Elle peut être utilisée comme méthode d'approximation pour la résolution des équations différentielles. Son principe s'appuie sur le fait que, le long d'une échelle discrète de pas arbitraire, les différences (n+1)-ième des valeurs successives d'un polynôme de degré n sont nulles, les différences n-ièmes restant constantes. Par exemple, pour la suite des nombres carrés, les différences secondes sont constantes et les différences troisièmes sont nulles :

[11] L'hygiène, la santé, la justice et l'éducation sont ainsi des axes majeurs de la politique des Whigs en raison des valeurs morales qui les associent à la religion (Hyman, 1983, 110-187).

12 Outre un modèle de démonstration réalisé en 1822, qui travaillait sur deux ordres de différences et des nombres à 6 chiffres, Babbage conçoit et réalise à partir de 1823 un modèle dont une partie est assemblée en 1833. Mais sa réalisation n'ira pas plus loin, et le débat reste ouvert quant aux causes de cette interruption. A partir de 1854, il utilisera les perfectionnements issus des plans de la machine analytique pour concevoir ceux d'une seconde machine aux différences, dont le Science Museum de Londres a réalisé un prototype en 1991, et en prépare un second pour les Etats-Unis.

13 Babbage cite ici : Note sur la publication, proposée par le gouvernement anglais des grandes tables logarithmiques et trigonométriques de M. de Prony, De l'imprimerie de F. Didot, 1 décembre 1829, 7.

0		1		4		9		16		25		36		49		64
	1		3		5		7		9		11		13		15	
		2		2		2		2		2		2		2		
			0		0		0		0		0		0			

Plus généralement, pour toute fonction développable en série de Taylor, il existe un intervalle sur lequel cette propriété est vraie, à une approximation près bien sûr, mais quelle que soit cette approximation[14]. Cette propriété permet, inversement, d'obtenir les valeurs successives d'une fonction par des suites d'additions, une fois connues la valeur de la dernière différence non nulle, ainsi que les premières valeurs des différents ordres de différence et le développement en série qu'on se propose d'utiliser. L'équation aux différences $\Delta^4 u_n = 0$ donne par exemple une approximation des fonctions logarithmes, satisfaisante pour les 10 premiers chiffres (Lacroix, 1819, 13).

M. de Prony, qui donnait alors à l'École Polytechnique des leçons sur cette méthode des différences et ses applications à l'interpolation, avait, pour réaliser ses tables, constitué 3 sections :

– la première formée de 5 ou 6 grands mathématiciens, était chargée de trouver l'expression analytique la plus adéquate au calcul numérique;

– la seconde, formée de 7 ou 8 personnes connaissant assez bien les mathématiques, convertissait en nombres les formules choisies par la première section;

– la troisième, formée de 60 à 80 personnes, recevant les nombres de la deuxième section, lui retournait les tables après avoir effectué les suites d'additions ou de soustractions imposées par la méthode.

La machine aux différences de Babbage mécanise le travail de la troisième section. Chaque ordre de différence – et la fonction elle-même, différence d'ordre nul – se trouve matérialisé par une colonne de roues dentées dont chacune porte un chiffre. Chaque colonne peut donc recevoir un nombre qui correspond à la valeur de son ordre. Le mécanisme, actionné par une manivelle située horizontalement sur le dessus de la machine, assure le transfert, c'est-à-dire l'addition des valeurs d'une colonne sur l'autre (Durand-Richard, 1992, 120 : 80-81). Plus que la distinction entre la matérialisation de l'opération et celle des nombres, déjà présente dans les précédentes machines à calculer, comme celles de Pascal et Leibniz, c'est la mécanisation du calcul qui en marque l'indépendance, et qui fait toute l'originalité de la machine aux différences. Si son élaboration suppose la rencontre entre réflexion théorie et pratique, elle suppose, tout comme l'Algèbre Symbolique, la subordination de la pratique à la théorie, du calcul effectif à son principe, puisque c'est la propriété fondamentale liant les valeurs d'une fonction à celles de ses différences qui s'y trouve matérialisée, puisque c'est sa mécanisation qui permet d'opérer sur les nombres initialement affichés.

Cette machine frappe d'autant plus l'imagination de ses contemporains que certaines modifications, intervenues au cours de sa réalisation, lui confère des possibilités que son inventeur lui-même n'avait pas prévues. Elle possède une latitude d'action tout à fait inattendue pour un appareillage mécanique, à laquelle Babbage se réfère abondamment dans son *Ninth Bridgewater Treatise,*

[14] Weierstrass démontrera en 1865 que cette propriété est vraie pour toute fonction continue [Dugac, 1973].

par exemple pour rendre compte de la possibilité des miracles. Elle peut fournir, à partir d'une suite de valeurs de la variable, une suite de valeurs pour une fonction dont la forme n'est pas nécessairement connue, ou encore, elle peut donner, grâce à la décision préalable de l'opérateur, une valeur tout à fait imprévisible à un observateur dans une suite de valeurs qui semblent obéir à une loi régulière. Un tel court-circuit dans la connaissance d'une loi générale renforce de fait la référence de principe à la loi : le phénomène est interprété comme l'existence d'une loi préalable encore inconnue, dont le calcul mécanique fournit justement la matérialisation. Comme l'écrit Jean Mosconi, la réalité mécanique supplée provisoirement à la légalité analytique pour conférer aux tables ainsi obtenues l'honorabilité mathématique (Mosconi, 1983, 80). Du coup, Babbage et Lardner vont affirmer que cette machine aux différences peut effectuer toute espèce de calcul, ce qu'il faut entendre comme toute espèce de calcul arithmétique. De fait, la machine aux différences peut traiter toute fonction récursive primitive, dont on peut établir la calculabilité par machine.

The analytical engine

C'est la réflexion sur le type d'équations résolues par la machine aux différences qui va conduire Babbage à en modifier progressivement les plans, jusqu'à concevoir une séparation plus radicale encore des fonctions opératoires. Afin de supprimer toute intervention humaine au cours du calcul, par exemple pour résoudre mécaniquement une équation telle que $\Delta^2 u_n$ = ch. unités de u_{n+1}, ou $\Delta^5 u_z$ =a. u_{z+1}, Babbage conçoit une structure circulaire, qui permet de faire intervenir le résultat obtenu sur les nouveaux calculs de la machine, donc de mettre en oeuvre ce principe de rétroaction qui deviendra tellement essentiel à l'automatisation et à la pensée cybernétique. C'est d'autre part la question des retenues qui conduit Babbage à attribuer une mémoire à la machine elle-même. Pour ne pas nuire à la rapidité du calcul, les retenues ne doivent pas être effectuées successivement, mais simultanément, donc préalablement stockées, ce qui conduit Babbage à l'idée d'une mémoire séparée, et d'un mécanisme arithmétique unique et central, accomplissant directement l'une quelconque des quatre opérations, dans un ordre indiqué par un organe de commande.

Les plans de la machine analytique, qui sont ceux d'une calculatrice automatique et mécanique à programme externe, isolent les différentes fonctions opératoires, respectivement matérialisées par une partie spécifique de la machine[15] :

– la mémoire (the Store), où sont stockées toutes les variables, avant et après le calcul,

– l'unité arithmétique de calcul (the Mill), aujourd'hui, le processeur, où sont effectuées les opérations,

– les deux types de crémaillère (the Rack) qui assurent le transfert des nombres entre le Magasin et le Moulin, et correspondent aux canaux d'entrée et de sortie,

– le dispositif de contrôle, matérialisé par des cylindres à picots, qui gèrent le déroulement des opérations à effectuer, et peuvent être assimilés à des sous-ensembles "micro-codés" de programme interne,

[15] Le nom des parties principales de la machine se réfère au vocabulaire des manufactures.

– le dispositif de commande, assuré par les cartes perforées, qui peuvent correspondre à des opérations, à des variables, ou à des données numériques spécifiques.

Cette machine ne fonctionne cependant pas dans le système binaire, mais dans le système décimal. Les cartes permettent soit la répétition "n" fois d'une ou plusieurs instructions, qui correspond à une boucle de programme, soit l'appel d'un court algorithme annexe, donc d'une « sous-routine ». Au cours de ses opérations, la machine est également capable d'une sélection qui correspond à un "branchement" ou "saut conditionnel", c'est-à-dire qu'un choix peut intervenir entre les termes d'une alternative. Quant à la programmation, si elle ne pouvait aller très loin en l'absence d'une machine effectivement construite, Babbage put cependant imaginer les opérations de contrôle indispensables au bon fonctionnement de sa machine quant à la validité des programmes, et il testait à la construction celles qui portaient sur l'exactitude des opérations (Ligonnière, 1987, 74-110).

Comme l'Algèbre Symbolique, la machine analytique organise le traitement algorithmique des opérations. La succession des ordres, sans cesse répétable pour une opération donnée, n'est autre qu'un enchaînement fini d'opérations élémentaires. Et Babbage insiste tout particulièrement sur le fait qu'elle peut gérer des calculs à l'infini, en suppléant au caractère fini de ses possibilités spatiales, par la possibilité d'une répétition illimitée de ses opérations. Il la reconnaît comme machine universelle, puisqu'elle peut calculer les valeurs de n'importe quelle fonction, là où la machine aux différences n'était qu'une machine particulière (Babbage, 1989, 11 : 117). Pour ses contemporains, elle n'est autre que la matérialisation même de l'analyse mathématique — d'où elle tire son nom — voire l'incarnation de la science des opérations (Lovelace, 1989, 3 : 118).

Alors que Luigi F. Menabrea, ingénieur militaire piémontais et futur premier ministre de l'Italie unifiée, auquel Babbage a présenté les plans de sa machine lors de son voyage à Turin en 1840, insiste sur le rôle d'exécutant de la machine :

> *Ainsi elle n'est point elle-même l'être qui pense, mais on peut la considérer comme l'être qui exécute les conceptions de l'intelligence* (Menabrea, 1989, 3 : 80-81).

Lady Lovelace[16], pour qui la machine analytique est particulièrement adaptée aux méthodes de séparation des symboles de variables et d'opérations d'Arbogast, est sensible au fait qu'il n'est pas nécessaire de connaître la forme générale de la fonction pour mener à bien les calculs, et insiste bien davantage sur le caractère symbolique des calculs ainsi effectuées :

> *De nombreuses personnes qui ne connaissent pas les études mathématiques imaginent que, puisque la tâche de la machine est de donner ses résultats en notation numérique, la nature de ses procédures doit donc être arithmétique et numérique, plutôt qu'algébrique et analytique. C'est une erreur. La machine peut organiser et combiner les quantités numériques exactement comme si c'étaient des lettres ou n'importe quels autres symboles généraux, et elle pourrait en fait donner ses résultats en notation algébrique, si on prenait des*

[16] Elle est l'auteur d'une traduction anglaise de l'article de Menabrea, qu'elle complète de notes importantes, rédigées à partir de ses discussions avec Babbage sur la machine analytique.

dispositions en conséquence. Elle pourrait développer trois ensembles de résultats simultanément, c'est-à-dire des résultats symboliques, des résultats numériques, et des résultats algébriques en notation littérale (Babbage, 1989, 3 : 144).

Aussi bien la réalisation de la machine aux différences que les plans de la machine analytique rendent manifestes les possibilités algorithmiques du calcul symbolique général autour duquel Babbage a construit son programme de recherche dès 1813, et dont Peacock a dégagé les principes. Les opérations s'y trouvent matérialisées sous forme de combinaisons et successions réglées d'opérations élémentaires, reconduisant ainsi la conception lockéenne des opérations. Poursuivant ce type d'approche, Babbage deviendra d'ailleurs un cryptologue éminent, produisant des dictionnaires briseurs de codes à partir d'une étude systématique des combinaisons (Babbage, 1989, 11, ch. XVIII). C'est dire que l'opératoire se confond pour lui avec la combinatoire et avec l'algorithmique, dont il analyse d'autant mieux le fonctionnement qu'il approfondit la décomposition des mécanismes matériels et mentaux en opérations élémentaires.

BOOLE ET LE CALCUL SYMBOLIQUE DE LA LOGIQUE

Boole, qui correspond avec Gregory pour la publication de ses articles mathématiques depuis 1839, n'ignore rien des enjeux des débats entre mathématiques et logique, et le calcul des opérations n'a pas de secret pour lui lorsqu'il rédige *Mathematical Analysis of Logic* en 1847, où il présente une expression mathématique de la logique scolastique publiée par Whately en 1826. Il s'y réfère à l'Algèbre Symbolique dès l'introduction et pose d'emblée la question de la non-interprétation des calculs logiques. Si le contenu logico-mathématique de son *Investigation of the Laws of Thought* de 1854 n'est guère différent, sa perspective est plus radicale, en ce sens qu'il s'affirme comme partie prenante du débat sur les statuts respectifs des mathématiques et de la logique, et que son travail s'offre comme réponse à cette question, comme médiation théorique essentielle entre les deux disciplines.

Dès son introduction, Boole interpelle les différents systèmes philosophiques qui constituent les enjeux de ce débat. S'il ne s'y réfère pas toujours nommément, ses intentions sont claires. Il se démarque de tous ceux qui considèrent la logique comme fondement des sciences expérimentales, ou qui cherchent à faire entrer la logique dans ce champ : de Descartes affirmant que le raisonnement consiste à appliquer certaines vérités premières et nécessaires dont l'esprit porte originellement la marque, de Hume réduisant la relation de cause à effet à un rapport de succession, de Mill affirmant que tout raisonnement ne porte que sur des choses particulières (Boole, 1854, 21-22-403), et de Kant ramenant la réalité externe de l'espace et du temps à de pures formes de l'entendement, donc, selon Boole, à la subjectivité (Boole, 1854, 418).

A la recherche d'une voie moyenne entre empirisme et innéisme, il affirme que sa méthode porte sur des opérations plus fondamentales que le syllogisme de la logique traditionnelle (Boole, 1854, 29). C'est en donnant une expression algébrique aux lois de la logique qu'il pense conférer à celle-ci le statut d'une science abstraite, au sens précis qu'en a donné Peacock dès l'introduction de son Rapport de 1833, et dont il suit d'ailleurs la démarche. S'il envisage de « prouver que les opérations de l'esprit sont effectivement soumises à des lois, et qu'une science de l'esprit est par conséquent possible », c'est en explicitant d'abord l'effectivité de cette science positive. Comme Locke, il se refuse au départ à toute hypothèse métaphysique sur leur fondement ou leur origine, même s'il affirme dans son dernier chapitre qu'elles reposent sur des facultés (Boole, 1854, 407). Et s'il se propose d'en déterminer le contenu à partir du langage, c'est-à-dire à partir de leurs manifestations, s'il fonde sa méthode sur l'observation, c'est-à-dire sur l'expérience, il refuse l'induction, et se démarque ainsi radicalement de l'empirisme d'un John Stuart Mill en spécifiant que, contrairement à ce qui se passe pour les sciences de la nature :

> *La connaissance des lois de l'esprit n'a pas besoin de se fonder sur un vaste ensemble d'observations. La vérité générale y est aperçue dans l'exemple particulier, et ce n'est pas la répétition des exemples qui le confirme. ... Les vérités générales de la logique sont d'une nature telle qu'elles commandent l'adhésion dès qu'elles se présentent à l'esprit* (Boole, 1992, 23-24).

Contrairement à la connaissance du monde extérieur et matériel, la connaissance des opérations de l'esprit n'est pas une connaissance probable, mais une connaissance que Boole présuppose comme certaine, précisément parce qu'elles sont fondées sur des facultés innées. Plus essentiellement encore, il exprime l'idée d'une correspondance entre expression dans le langage, et conception dans la pensée, et par conséquent, d'une identité des processus de composition dans les deux cas, la composition des expressions élémentaires correspondant à l'expression de la conception composée. Ainsi, toute expression dans le langage correspond ainsi à une conception dans la pensée (Boole, 1854, 14-39). Les lois des signes dans le langage manifestent les lois du raisonnement, selon une équivalence formelle qui préserve les éléments communs et universels entre les innombrables langues et dialectes de la terre (Boole, 1854, 409-410). De ce fait, Boole n'a donc pas à trancher sur la question de savoir si les signes représentent les choses et leurs relations, ou les conceptions et les opérations de l'intellect humain. Mais comme chez Locke, les lois des signes ne manifestent pas les lois des choses (Boole, 1854, 24-26-30)

Dans un premier temps, Boole prend donc connaissance des manifestations de ces lois en étudiant, dans le langage, l'articulation des substantifs que sont les noms, les adjectifs et les descriptions, où chacun d'eux peut être remplacé par un signe arbitraire à condition que son interprétation ne change pas dans les limites d'un même discours.

> *Définition : un signe est une marque arbitraire, dont l'interprétation est fixée et qui est susceptible d'être combiné à d'autres signes conformément à des lois déterminées dépendant de leurs interprétations respectives* (Boole, 1992, 43).

Ainsi,

- à l'inversion possible des substantifs dans le langage correspond $xy = yx$, qui montre que, pour cette première loi, ces symboles sont commutatifs

- à la réunion de parties distinctes, dit Boole au sens de disjointes, correspond $x+y = y+x$, qui montre que, pour cette première loi, ces symboles sont commutatifs

- à leur combinaison correspond $z(x+y)=zx+zy$, qui montre que, pour ces deux lois, les symboles sont distributifs.

- à leur répétition correspond $x^2 = x$ (Boole, 1854, 26-38).

Puis, dans un second temps, partant de l'affirmation selon laquelle « nommer, c'est sélectionner une classe d'objets dans un certain univers du discours[17]», Boole reconstruit le même calcul symbolique sans plus avoir recours au langage, mais en s'appuyant directement sur l'opération mentale de sélection ainsi définie.

Ayant ainsi obtenu une formulation algébrique des lois de la pensée, Boole entreprend de travailler sur ce langage scientifique selon le mode de calcul symbolique, indépendamment de toute interprétation des symboles, reconduisant la conception de Peacock sur le mode de validation des procédures symboliques.

> *C'est du moins un fait indiscutable que la validité d'une conclusion obtenue par une procédure symbolique quelconque de raisonnement ne dépend pas de notre capacité à interpréter les résultats formels qui se sont présentés aux différentes étapes de la démarche. De fait, il existe certains principes généraux concernant l'usage des méthodes symboliques* (Boole, 1992, 81).

Renonçant comme Peacock à s'appuyer sur l'interprétation pour légitimer les propriétés des opérations, Boole engage le calcul sur ces expressions en faisant systématiquement usage des analogies entre les expressions trouvées pour exprimer les lois logiques, et leur équivalent algébrique. La loi de dualité en est un exemple central. C'est par des transformations algébriques élémentaires que Boole passe de $x^2 = x$ à $x(1-x) = 0$, dont les seules solutions sont 0 et 1. D'où il affirme que l'obtention de cette loi dite de dualité est indépendante de la métaphysique puisqu'elle est déduite de conceptions logiques : c'est seulement par interprétation que cette loi est appelée principe du tiers exclu[18] (Boole, 1992, 64-66). Cependant, Boole n'accepte pas plus que ses prédécesseurs de fonder son approche sur ces seules analogies opératoires, auxquelles il attribue pour seul rôle la manifestation de la capacité des facultés humaines à reconnaître l'existence d'un principe d'ordre (Boole, 1992, 388). L'identité entre l'expression des lois logiques et algébriques n'est donc pas attribuée à l'analogie, mais au théorème de transfert (Boole, 1992, 48-49) que Gregory a substitué au principe de permanence des formes équivalentes, lui apportant une forme à la fois plus rigoureuse et plus effective :

> *Car tout ce qui est prouvé pour ces derniers symboles, à partir des lois connues de leurs combinaisons, doit également être vrai de tous les autres symboles qui sont soumis aux mêmes lois de combinaison* (Gregory, 1839, 34).

Dès lors que des opérations sont soumises aux mêmes lois de combinaison, tout ce qui a été démontré pour l'une vaut pour l'autre. C'est ce théorème que Boole applique aux processus logique et algébrique :

> *Si les opérations arithmétique et logique sont exprimées de la même manière, leurs expressions symboliques seront sujettes à la même loi formelle* (Boole, 1992, 49).

---

[17] La notion d'univers du discours a préalablement été conceptualisée par de Morgan.

[18] Boole interprète cependant 0 comme la conception du Rien et 1 la conception du Tout, de l'Univers. Comme le souligne à juste titre I. Grattan-Guinness (Grattan-Guinness, 1983, 101), cette interprétation des symboles 0 et 1 renvoie au monisme de Boole, qui réapparaît à la fin de l'ouvrage lorsqu'il la reprend en termes de pensée religieuse ou métaphysique, depuis la notion d'Etre des philosophes grecs (Boole, 1854, 411-416).

Ainsi, l'écriture mathématique des lois des opérations de l'intellect ne signifie pas que la logique est une application des mathématiques, mais seulement que l'une et l'autre relèvent d'un même calcul logique, expression du fonctionnement des lois de la pensée.

> *Emprunter à la science du nombre sa notation pour ensuite supposer que, dans sa nouvelle application, les lois qui en gouvernent l'usage demeurent inchangées serait une pure hypothèse. En vérité, il existe certains principes généraux qui trouvent leur fondement dans la nature même du langage, et qui déterminent l'usage des symboles qui ne sont rien d'autre que les éléments d'un langage scientifique* (Boole, 1992, 25).

C'est de ce point de vue que G. Boole prend explicitement parti dans le débat portant sur le fait de savoir si la connaissance est ontologiquement fondée sur la logique ou sur les mathématiques. Les conceptions qu'il présente dans les *Lois de la Pensée* lui permettent de conclure, dans son dernier chapitre, qu'il s'agit là d'un faux débat. Son travail apparaît alors comme une médiation essentielle sur la question d'accorder plutôt aux mathématiques qu'à la logique le statut de fondement de la connaissance. Il lui permet de renvoyer dos à dos les positions divergentes à ce sujet, en rappelant que, de manière beaucoup plus fondamentale, le savoir n'est pas chose profane : il reste fondé sur la Morale, et vise à la connaissance du monde créé par Dieu.

C'est sur de tels présupposés que Boole s'autorise à écrire algébriquement les lois d'une logique qui reste ancrée, depuis Aristote, sur une analyse du langage, et qui correspond à la fois au calcul des propositions et au calcul des classes, dont il établit l'équivalence. Ce sont des présupposés qui marquent les limites de son élaboration, quant au fait de considérer les lois qu'il dégage comme étant les «lois de la pensée». Ces limites sont également celles de l'entreprise de l'École Algébrique Anglaise.

CONCLUSION

Ainsi, un bon siècle avant la réalisation des premiers ordinateurs, les éléments fondateurs de leur nouveauté se mettent en place dans le contexte de la Révolution Industrielle Anglaise. Ils sont partie prenante des attitudes suscitées dans la société vis-à-vis des rapides transformations matérielles et sociales dont elle est l'objet.

Cette attitude se traduit, chez les mathématiciens de l'École Algébrique Anglaise, par le souci d'intégrer cette idée de transformation, en la laissant soumise à la permanence d'une loi qui en organise les manifestations. Elle intervient dans plusieurs champs, en s'appuyant sur la polysémie du terme «opération», mais se déploie selon le même mode d'organisation, où le caractère automatique du processus opératoire est fondé sur une nécessité logique, celle de ses propriétés, et sur son indépendance par rapport à l'effectivité des transformations qu'il produit. En mathématiques, avec Peacock, l'algèbre devient symbolique, et sa légitimité est affirmée comme indépendante des interprétations contingentes qui ne font que suggérer les lois qui les subordonnent. Les mêmes conditions président à l'écriture algébrique des lois logiques proposée par Boole. Vérité et consistance, au sens de cohérence opératoire, se trouvent ainsi précisément distinguées. Quant à l'organisation du monde de l'industrie naissante, source même des transformations les plus manifestes, sa rationalisation repose chez Babbage sur l'exercice d'une division du travail qui s'applique aussi bien au travail manuel qu'au travail mental, et qu'il matérialise dans ses machines. Dans tous ces domaines, dont la réorganisation est alors essentielle à l'équilibre social de l'Angleterre, envisager la pensée comme action permet d'offrir une large place à une expérience alors prépondérante. Mais, plus essentiellement encore, la pensée est ainsi conçue comme processus opératoire, et la philosophie de Locke se trouve alors convoquée pour mieux signifier le caractère arbitraire de signes qui ne sauraient suffire à étayer la connaissance, et en même temps pour mieux fonder le caractère compositionnel de cette pensée sur les opérations de l'esprit, donc sur l'innéité des facultés.

Mais cette représentation théologique du monde que les mathématiciens de l'École Algébrique Anglaise partagent avec Locke leur permet de masquer le constructivisme de leur référence à l'invention puisque les lois sont issues de l'expérience en même temps qu'elles leur sont logiquement préexistantes, cette expérience ne faisant que les suggérer, sans qu'il soit jamais affirmé qu'elle permet de les construire. Du même coup se trouve aussi masqué le risque inhérent à cette conception combinatoire des opérations, risque de réification de l'action humaine, et risque de réduction des effets de cette action à celui d'un calcul aveugle et mécanique. Tout comme se trouve préservée la possibilité de réaffirmer le caractère moral de la raison, et donc l'éthique de la connaissance, dans le cadre d'une théologie naturelle qui tente de faire front aux valeurs de l'utilitarisme.

Si les éléments conceptuels qui sous-tendent la réalisation des ordinateurs sont en place, la crise des valeurs que pose cette possibilité nouvelle d'une mécanisation des processus opératoires l'est également. Et si, au début du XIXème siècle, la théologie naturelle sert d'ultime recours pour fonder moralement et ontologiquement la possibilité de telles transformations, la question reste ouverte de se demander comment faire en sorte que ces processus de mécanisation du travail manuel et du travail mental ne débouchent pas sur une réification du sujet cher à Descartes. Peut-être s'agit-il précisément de rompre aussi avec cette conception du sujet pour aborder les modes de conceptualisation aujourd'hui attachés à celle de personne humaine, et d'abandonner la conception associationniste de la pensée pour se référer plutôt à sa complexité.

Bibliographie

Anonyme. (1813). Memoirs of the Analytical Society, Cambridge.

Babbage, Charles (1989). The Works of Charles Babbage, sous la direction de Martin Campbell-Kelly, London, William Pickering, 11 vols.

Babbage, Charles inédit. Babbage Papers. Londres, British Library.

Babbage, Charles ss d. Mss: Essays on the Philosophy of Analysis. London, British Library. Add. Ms. 37 202.

Babbage, Charles (1815-16). An Essay towards the calculus of functions. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 105: 389-423. 106: 179-256. Works, 1, 93-193.

Babbage, Charles (1817). Observations on the analogy which subsists between the calculus of functions and other branches of analysis. *Philosophical Transactions*. 107: 197-216. Works. 1: 216-30.

Babbage, Charles (1822). Observations on the notation employed in the calculus of functions. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1: 63-76. Works. 1: 344-54.

Babbage, Charles (1823). On the Application of Analysis to the Discovery of local Theorems and Porisms. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 9: 339-52. Works. 1: 355-70.

Babbage, Charles (1827). On the influence of signs in mathematical reasoning. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 2, 325-77. Works. 1: 371-408.

Babbage, Charles (1830). On Notation. *The Edinburgh Encyclopædia*, vol. 15: 394-19. Works. 1: 409-24.

Babbage, Charles (1837). *Ninth Bridgewater Treatise*. London. Murray. Works, 9.

Babbage, Charles (1864). *Passages of the Life of a Philosopher*. London. Longman, Green, Longman, Roberts and Green. Works, 11.

Berkeley, George (1987). *The Analyst. Œuvres. II.* Paris. PUF (Épiméthée).

Boole, George (1847). *Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Cambridge : MacMillan.

Boole, George (1854/1992). *Les lois de la pensée*. Traduit de l'anglais : *An Investigation on the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities,* par Souleymane Bachir Diagne. Paris : Vrin.

Cannon, W.F. (1964). Scientists and Broadchurchmen: An Early Intellectual Network. *Journal of British Studies*, IV, n° 1: 65-88.

Corsi, Pietro (1988). The heritage of Dugald Stewart: Oxford Philosophy and the method of political economy. Firenze, Leo S. Olschki editore.

De Morgan, Augustus (1835). Review of George Peacock, A Treatise of Algebra. *Quarterly Journal of Education*, 9: 91-110 & 293-311.

Dubbey, J.M. (1978). *The Mathematical Work of Charles Babbage*. Cambridge: Cambridge University Press.

Duchesneau, François (1973). *L'empirisme de Locke*. La Haye: M. Nijhoff.

Dugac, Pierre (1973). Éléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, X, 41-176.

Durand, Marie-José (1990) "Genèse de l'Algèbre Symbolique : une influence possible de Locke". *Revue d'histoire des sciences*, 43, n°2-3 : 129-80.

Durand-Richard, M.J. (1992) Charles Babbage (1791-1871) : De l'École algébrique anglaise à la "machine analytique". *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 118 : 5-31; "Erratum", 120 : 79-82.

Durand-Richard, Marie-José (1996). L'École Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance. In Goldstein, C., Gray, J. & Ritter, J. (Eds) : *L'Europe Mathématique - Mythes, histoires, identité*. Paris: M.S.H : 445-77.

Gascoigne, John (1989). *Cambridge in the age of the Enlightenment, Science, religion and politics from the Restoration to the French Revolution*. Cambridge: Cambridge University Press.

Grattan-Guinness, Ivor (1983). Psychology in the foundations of logic and mathematics : the cases of Boole, Cantor and Brouwer. Psicoanalisi e Storia delle Science. Firenze, Leo S. Olschki Ed.: 93-121.

Gregory D.F. (1839) On the solution of linear differential equations with constant coefficients. C.M.J., 1, 22-33, Mathematical Writings, Cambridge. 1865, 14-27.

Gregory, Ducan Farquharson (1840). On the Real Nature of Symbolical Algebra. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 14: 208-16.

Hamilton, William Rowan (1931-40-67). The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton. Cambridge: Cambridge University Press, vol 1: Geometrical Optics. (eds.) A.W. Conway & J.L. Synge, vol. 2: Dynamics. (eds.) A.W. Conway & A.J. McConnell, vol. 3: Algebra. (eds) H. Halberstam & R.E. Ingram.

Hamilton, William (1860). Lectures on Metaphysics and Logic. vol. 3: Logic. lecture V, part I, section I : "Noetic : On the fundamental laws of thought. Their contents and history". Edinburgh and London, 4 vols.

Hamilton, William Rowan (1837). Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. *Transactions of the Royal Irish Academy*, 17: 203-422. Mathematical Papers, 3: 4-96.

Herschel, John F.W. inédit. Herschel Papers. Londres. Royal Society Library.

Hobbes, Thomas (1651/1971). *Léviathan, Traité de la matière, de la forme et du pouvoir de la République ecclésiastique et civile*. (traduit de l'anglais par F. Tricaud). Paris : Sirey.
Hyman, Anthony (1983). *Charles Babbage, Pioneer of the Computer*. New Jersey: Princeton University Press.
Koppelman, Elaine H. (1969). *Calculus of Operations: French Influence on the British Mathematics in the first half on the nineteenth century*. PhD. Diss., John Hopkins University.
Lacroix, Sylvestre François (1816). *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus*. (Translated from the French, with an Appendix and Notes, by Babbage, Charles, John F. W. Herschel & George Peacock). Cambridge: Deighton and sons. London, Law & Whittaker.
Lacroix, S.F. (1810-19). *Traité de Calcul différentiel et du calcul intégral, Partie III : Des différences et des Séries*. Paris : Courcier.
Lagrange, Joseph-Louis (1797). *Théorie des fonctions analytiques*. Paris, Imprimerie de la République, in (éds) Serret J.A. & Darboux, G., 1867-92, Œuvres, Paris, Gauthier-Villars, 14 vols, vol. IX.
Laïta, Luis (1977). The Influence of Boole's Search for a Universal Method in Analysis on the Creation of his Logic. *Annals of Science*, 34: 163-76.
Ligonnière, R. (1987). *Préhistoire et Histoire des Ordinateurs*. Paris : Laffont.
Locke, John (1700/1983). *Essai philosophique sur l'entendement humain*. (traduit de l'anglais par M. Coste). Paris : Vrin.
Lovelace, Ada A. (1989). Sketch of the Analytical Engine invented by Charles Babbage. Scientific Memoirs. 1843. 3: 666-731. (in) Babbage, Works, 3 : 89-170.
Mac Farlane, A. (1916). "George Peacock (1791-1858)", Lectures on ten British Mathematicians. New York.
MacHale, Desmond (1985). *George Boole, his Life and Work.* Dublin: Boole Press.
Menabrea, Luigi F. (1989). Notions sur la machine analytique de M. Charles Babbage. Bibliothèque Universelle de Genève, t.xli, octobre 1842, (in) Babbage, Works. 3: 62-82.
Michaud, Yves (1986). *Locke*. Paris : Bordas (Philosophie présente).
Morrell, John & Allan Thackray (1981). *Gentlemen of Science, Early Years of the British Association for the Advancement of Science*. Oxford: Clarendon Press.
Mosconi, Jean (1983). Charles Babbage : vers une théorie du calcul mécanique. *Revue d'Histoire des Sciences*, XXXV, n°1 : 69-107.
Novy', Lubos (1968). L'École Algébrique Anglaise. *Revue de Synthèse*, III° S., n°49-52, janv. déc. 1968 : 211-222.
Peacock, George (1830). *A Treatise of Algebra*. Cambridge. Réed. 2 vols, 1842-45.
Peacock, George (1833). A Report on the Recent Progress and Actual State of certain branches of Analysis. *Proceedings of the British Association for the Advancement of Science*, 3: 185-351
Peacock, George (1834). *A Report on the Recent Progress and Actual State of certain branches of Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
Peacock, George (1826-1845). Arithmetic. *Encyclopaedia Metropolitana*, vol. I: Pure Sciences. London: Smedley, & Rose : 369-523.
Piaget, Jean (1967). L'épistémologie et ses variétés. In Jean Piaget (éd.) : *Logique et connaissance scientifique*. Paris : Gallimard (La Pléiade).
Whewell, William (1850). *On a liberal education in general, and with particular reference to the leading studies in the University of Cambridge*. Cambridge: Cambridge University Press.
Woodhouse, Robert (1802). On the Independence of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation, and on the Advantages to be Derived from their Separation. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 92: 85-125.
Woodhouse, Robert (1803). *Principles of Analytical Calculation*. Cambridge: Deighton.