Sortir de l'enfer cantorien

Michel De Glas*

RÉSUMÉ : Après avoir brièvement rappelé ou mis en évidence les paradoxes du continu mathématique et de l'infini, hérités des travaux de Cantor et Dedekind, nous montrons que les divers constructivismes mathématiques censés les concurrencer s'avèrent incapables, en dépit de leur inspiration néo-platonicienne, de s'échapper de l'actualisme et du platonisme mathématique. Ce problème est en fait, non seulement, un des problèmes clés de la philosophie des mathématiques mais, également, un problème auquel les sciences cognitives peuvent apporter une contribution majeure. Le rôle joué par la topologie, à la fois sur le plan intra-mathématique et sur celui de la modélisation en sciences cognitives, témoigne de cette soumission à l'orthodoxie ensembliste (continu ponctiforme, infini en acte). La locologie a pour ambition de relever le défi de la constitution d'une nouvelle *analysis situs*. La logique localiste, construite sur le substrat locologique, redéfinit les contours du constructivisme logico-mathématique.

Mots clés : continu ponctiforme, infini en acte, actualisme/constructivisme, topologie, méréologie, analyse non standard, locologie, logique localiste, théorie de loci.

ABSTRACT: Getting away from the Cantorian hell. Having briefly recalled the paradoxes conveyed by the mathematical continuum and the infinite, inherited from the founding works of Cantor and Dedekind, we show that the various mathematical constructivisms, despite their neo-aristotelian inspiration, prove to be unable to escape actualism and mathematical platonism. This problem actually is, not only, one the key problems in the philosophy of mathematics, but also a problem to the solution of which cognitive science may greatly contribute. The role played by topology in the field of mathematics as well as in the elaboration of mathematical models in cognitive science is typical of this submission to the set-theoretical orthodoxy (punctiform continuum, actual infinite). Locology may be seen as an alternative to topology, a new *Analysis situs*. Localistic logic, which is based upon the locological substratum, aims at redefining the outline of logical and mathematical constructivism.

Key words: punctiform continuum, actual infinite, actualism/constructivism, topology, mereology, non standard analysis, locology, localistic logic, loci theory.

« Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können »
David Hilbert, Über das Unendliche,
Mathematische Annalen 95 (1926), 161-190

1. INTRODUCTION

L'idée que l'intuition mathématique fait appel au « sens » des concepts au moins autant qu'à la rigueur qui préside à leur définition s'est progressivement frayé un chemin sur les décombres du formalisme et a conduit à considérer le problème des fondements des mathématiques comme non seulement logique

* CREA, CNRS – École Polytechnique, michel.deglas@polytechnique.edu

mais également, et surtout, épistémologique – les mathématiques, en tant que construction conceptuelle, faisant dès lors droit à une analyse de leur genèse, historique et cognitive. Cette recherche des origines cognitives des mathématiques s'est développée, ces vingt dernières années, en négatif, au sens photographique du terme, de celle consacrée aux fondements mathématiques des processus cognitifs. Ces programmes de recherche même s'ils résistent difficilement à la tentation d'une « naturalisation » dont le mot d'ordre semble imposé par les succès – au demeurant souvent surestimés – des neurosciences, présentent l'intérêt de montrer en quoi nombre de problèmes issus des sciences cognitives sont, peut-être avant tout, des problèmes mathématiques ou de philosophie des mathématiques.

Les problèmes abordés et les questions qu'ils suscitent font écho aux débats et controverses qui, au tournant du vingtième siècle, opposèrent les points de vue de Riemann et Poincaré, d'un côté, à ceux de Frege et Hilbert, de l'autre, sur les fondements des mathématiques. Malgré les faiblesses par trop évidentes et les échecs des analyses de Frege et, plus encore, de Hilbert, sur la possible réduction des mathématiques à un traitement finitaire de suites finies de symboles, ces approches jetèrent les bases de la théorie de la preuve et imposèrent la logique comme branche à part entière des mathématiques. Elles contribuèrent, en outre, à faire émerger le codage finitaire (Gödel), le calcul effectif (Herbrand, Turing, Church) et à porter l'informatique et l'intelligence artificielle sur les fonts baptismaux. Les succès de la première et les échecs de la seconde constituent, en quelque sorte, la « réification », respectivement, des avancées et des limites des analyses frégéennes et hilbertiennes. Les succès de l'informatique occultèrent, pendant près d'un demi-siècle, les points de vue de Riemann et Poincaré ; les échecs de l'intelligence artificielle (plus généralement de l'option cognitiviste) ouvrirent la voie à leur retour en grâce. La recherche actuelle sur les fondements cognitifs des mathématiques et les fondements mathématiques du cognitif renouent, en effet, avec l'idée de privilégier le rôle de l'espace et la constitution des concepts par l'homme comme inséré dans le monde, et de remettre à l'honneur les points de vue de Weyl, Enriques, Thom, etc, qui prolongent et enrichissent ceux de Riemann et Poincaré, sur le rôle constitutif de l'espace et du temps dans notre réprésentation des phénomènes.

Ces programmes circonscrivent une problématique où la géométrie campe le rôle principal. Outre le phénomène de balancier, dont l'histoire est friande, d'une extrémité à l'autre de la classification des disciplines mathématiques, les raisons en sont simples. « Science de l'espace » (Riemann) ou « science du mouvement dans l'espace » (Poincaré), la géométrie, éventuellement reconstruite, selon les vœux de ce dernier, à partir de la géométrie sensible, devient, en effet, le point nodal de la recherche du « sens » en mathématiques et la pièce maîtresse de l'arsenal théorique d'une recherche des fondements mathématiques du cognitif. En outre, les modèles qui se trouvent convoqués doivent se caler, afin de fournir une approche scientifique du vivant (mais au risque d'une contradiction avec leur inspiration phénoménologique première), sur ceux des sciences de la nature. C'est évidemment la géométrie qui, en tant que science transcendante, fournit l'élément clé de ce programme de « naturalisation ».

La géométrie fait également son entrée, phénomène plus inattendu, par le biais des structures catégoriques sous-jacentes à la logique : la théorie des topoï, qui fournit un fondement catégorique à la logique, peut être vue comme pourvoyeuse d'une « géométrisation » de la vérité. En outre, dans ce même domaine de la logique, la géométrie entre également « par la fenêtre » (Girard), c'est-à-dire dans la structure même des preuves grâce aux réseaux de preuves.

Même si ces usages du mot « géométrie » recouvrent des sens différents, ils renvoient tous à une même famille de modèles. La géométrie étant une science du mouvement dans l'espace, les outils géométriques sont, en fait, ceux de la géométrie différentielle (et de la topologie différentielle). Les modèles sont ceux des systèmes dynamiques : modèles d'auto-organisation, modèles de l'émergence des formes, modèles dynamicistes de la théorie des catastrophes.

Si le recours à la géométrie pour l'étude des fondements cognitifs des mathématiques et des fondements mathématiques du cognitif s'impose, en quelque sorte, de lui-même, l'utilisation des modèles dynamicistes ou émergentistes relève, elle, d'un choix guidé, sur le plan mathématique, par la recherche de la puissance des outils de la topologie et de la géométrie différentielles et, sur celui de la philosophie des mathématiques, par une acceptation acritique du continu et de l'infini actuel et une adhésion à une forme de platonisme mathématique.

L'hypothèse que les mathématiques se développent principalement, voire exclusivement, à partir de l'intuition a fécondé un autre courant de recherches, qui s'est développé pour l'essentiel au sein de la logique : le constructivisme mathématique. Ce courant, qui présente de multiples facettes – de la méréologie (Husserl, Lesniewski) au non standardisme (Robinson, Nelson), en passant bien sûr par l'intuitionisme (Brouwer, Heyting) –, s'est forgé dans une opposition au formalisme, bien que le finitisme hilbertien soit aussi une forme de constructivisme. C'est bien sûr la question du « sens » qui dessine la ligne de fracture.

Cette question, *a contrario*, rapproche le courant constructiviste de celui, décrit ci-dessus, qui plaide pour une approche géométrique du « sens ». Mais, hormis cet objectif commun, tout oppose, ou du moins semble opposer, ces deux courants situés de part et d'autre de la ligne de clivage constructivisme / actualisme. Les constructivismes, héritiers, au demeurant infidèles, de l'artistotélisme, rejettent la conception du continu et de l'infini actuel à la Cantor : le continu est infiniment divisible ; l'infini est en puissance, non en acte. Ce rejet de l'actualisme explique pour une part le discrédit qui a toujours frappé le constructivisme dans ses diverses composantes. Son assimilation injustifiée au cognitivisme (dont le « constructivisme » est étranger aux constructivismes mathématiques dont il est question ici) ajoute désormais l'opprobe au discrédit.

Le prix à payer du règne, désormais sans partage, du continu ponctiforme et de l'infini actuel au travers de la théorie des ensembles et de ses prolongements (topologie, topologie différentielle, géométrie différentielle, …), de l'actualisme et du platonisme mathématique qui en sont les « doublures » épistémologiques et des modèles dynamicistes en sciences physiques et en sciences cognitives qui en constituent le bras armé, mérite néanmoins d'être évalué. La théorie des ensembles (théorie des ensembles linéaires de points, selon l'appellation de Cantor lui-même) ayant réduit le continu géométrique à un continu arithmétique et ainsi vidé la notion de continu de toute référence aux notions phénoménales d'espace et de temps, le mariage de la géométrie, censée être un creuset pour l'étude du sens, et du continu cantorien apparaît comme une alliance contre nature qui fait surgir ou resurgir un flot de paradoxes qu'une présentation sélective de l'histoire – voir les critiques, parfois féroces, du continu cantorien par Poincaré, Weyl ou Thom, auteurs pourtant invoqués par les « continuistes » à l'appui de leurs thèses – ne suffit pas à résorber. La Section 2 ci-dessous est consacrée à l'impact de ces paradoxes sur les modèles continuistes de la cognition.

Si les divers constructivismes mathématiques ne sont pas parvenus à écorner la domination du continu cantorien, c'est que – outre un abus de position dominante des tenants de l'orthodoxie ensembliste ayant conduit à la marginalisation, voire au bannissement, des dissidents – ces constructivismes ne se sont jamais réellement affranchis, nonobstant la vulgate, du continu cantorien et n'ont pas réussi à se départir, en dépit de leur inspiration néo-aristotélicienne, d'une vision platonicienne des mathématiques. La place réservée à la topologie, pourtant tributaire de la théorie des ensembles et de sa conception du continu, en est une des manifestations. Poincaré et Thom, pourfendeurs du continu cantorien et de l'infini actuel, ont fait de l'un et de l'autre, via la topologie algébrique pour le premier et la topologie différentielle pour le second, un usage systématique. De la même façon, comme nous le verrons en Section 3, la méréologie en s'étendant, par adjonction de certaines primitives topologiques, aux méréotopologies, a dû remiser son ambition initiale d'échapper à la juridiction ensembliste ; la logique intuitioniste, ni plus ni moins constructive que la logique classique (ses liens avec la topologie, le λ-calcul et la théorie de topoï en témoignent), n'est jamais sortie de l'ornière ensembliste et l'ambition de l'intuitionisme de résorber les paradoxes du continu est restée lettre morte ; le constructivisme non standard n'a pu s'afficher comme tel qu'en s'appuyant sur la donnée d'entités fictives, tout hyperréel étant canoniquement associé à un sous-ensemble non mesurable de la droite réelle.

La topologie, en convoyant le continu cantorien au sein de la géométrie et des mathématiques (censément) constructivistes, dépouille celles-ci de la possibilité d'appréhender le spatial de façon satisfaisante. Comme nous le verrons en Section 4, l'inadéquation de la topologie à une mathématisation de l'espace prend sa source au cœur même de la discipline dont les concepts fondamentaux (voisinage, frontière, intériorité, etc.), porteurs de leurs origines ensemblistes, distordent les notions intuitives sous-jacentes au point de verser dans le paradoxe. La nécessaire refondation mathématique du spatial qui se dessine ainsi en creux est un défi que la locologie, créée par l'auteur, tente de relever. Cette nouvelle *analysis situs* redéfinit à nouveaux frais les concepts appréhendés par la topologie : véritable mathématisation du continu de la *Physique* aristotélicienne et du continu « physique » de Poincaré, la locologie donne corps au « rêve » de Brentano et à celui de Thom. La logique localiste, construite sur la substrat de la locologie, redessine, dans ses dimensions algébrique, logique, géométrique et catégorique, les contours du constructivisme logico-mathématique.

2. LES FIGURES DU CONTINU

2.1 L'immense corpus philosophique (Aristote, Leibniz, Kant, Husserl, Weyl, …), logique et mathématique (Veronese, Cantor, Dedekind, Kronecker, Borel, Hilbert, Brouwer, …) consacré à la question du continu, laisse apparaître, en dépit d'un formidable foisonnement, quelques lignes de force.

Le continu et l'infini aristotéliciens, bien que susceptibles de deux appréhensions différentes (selon l'ordre de préséance de l'un sur l'autre) et bien que pris dans une catégorisation quasi inextricable (où interviennent les genres, les domaines et les procédés potentiellement applicables à l'un et à l'autre), n'en sont pas moins caractérisés par les traits suivants : (i) l'infini est en puissance et non en acte ; cet infini de puissance se manifeste, entre autres, dans la divisibilité infinie des grandeurs ; (ii) le continu n'est pas composé de parties indivisibles et ne peut se réduire à un agrégat d'infinis en acte ; (iii) le continu est spécification des liens entre un tout et ses parties qui sont consécutives et contiguës et ont des limites adjacentes communes ; (iv) le mouvement est inachevé, irréductible à un acte achevé ; aussi l'immobilité est-elle au mouvement ce que l'extrémité d'une ligne est à la ligne.

Formulé en termes modernes, le continu aristotélicien se caractérise par une divisibilité infinie, donc une non compositionnalité, l'obéissance aux principes de contiguïté et de connexité (ces deux points étant souvent indûment confondus dans la littérature), un inachèvement et un infini en puissance. Cette conception aristotélicienne du continu constitue la matrice de l'*Analysis situs* leibnizienne et de la philosophie kantienne du continu géométrique. En effet, si la position de Kant, dans le domaine de la physique, oscille entre l'atomisme de sa *Monadologie physique* et l'anti-atomisme de l'*Opus postumum*, sa conception du continu géométrique est strictement anti-atomiste : le continu est une donnée intuitive originaire, non compositionnelle, les intuitions pures que sont le temps et l'espace étant des grandeurs continues, insusceptibles d'être composées d'éléments simples, et à la base desquels se trouve le continu géométrique ; les points de l'espace et les instants ne sont que des « limites » potentielles. Cette vision du continu géométrique inspirera les approches phénoménologiques du continu (Peirce, Brentano, Husserl), en particulier ce qu'on appelle, depuis la troisième *Recherche logique* de Husserl et les travaux de Lesniewski, la méréologie, et, de façon plus indirecte, l'intuitionisme brouwérien.

C'est, en revanche, avec cette conception du continu infiniment divisible (et non compositionnel) et de l'infini potentiel que la théorie des ensembles de Cantor et Dedekind, en promouvant le continu « sans épaisseur » et l'infini en acte, opère une rupture définitive. La révolution impulsée par Cantor et Dedekind dissocie les concepts mathématiques d'espace de l'intuition de l'espace perceptif. L'arithmétisation du continu confine à la déspatialisatoin du géométrique et tourne ainsi le dos à la vision géométrique héritée d'Euclide mais renoue, en revanche, avec ce dernier sur deux points essentiels : le continu sans épaisseur (sans largeur), donc ponctiforme (c'est Euclide qui fixe l'emploi de *semeion* pour désigner le point géométrique et le définir comme indivisible) ; son intuition de l'infini dont l'exploitation par Cantor et Dedekind permettra l'accouchement.[1]

Aucune des approches critiques – y compris les divers constructivismes (dont la méréologie et l'intuitionisme, déjà mentionnés) –, pourtant portés par des mathématiciens aussi influents que Kronecker, Brouwer, Poincaré, Weyl, Robinson ou Thom, n'a pu remettre en cause la conception du continu et de l'infini à la Cantor-Dedekind ni, de ce fait, entamer la position monopolistique de la théorie des ensembles. Bien que puisées aux meilleures sources de la période pré-cantorienne, ces courants de recherche ont fini par s'enfermer dans l'étau, au demeurant confortable, du continu cantorien, et n'être que des héritières indirectes et souvent infidèles de la pensée (néo)-aristotélicienne.

Le point de vue de Thom est, à cet égard, remarquable. Dans son *Esquisse d'une sémiophysique* (1988), par exemple, il s'attache à inscrire sa démarche dans la tradition aristotélicienne (et leibnizienne) : son affirmation de l'antériorité ontologique du continu sur le discret, son refus de la « dictature » de la générativité arithmétique, etc, le conduisent à voir en Aristote le « seul penseur du continu », le seul dont l'ambition ait été de géométriser la pensée et l'activité langagière, et à considérer les ensembles de la théorie cantorienne comme des « sacs à poussière », non fondés à représenter le continu. Thom voit, en effet, dans la conception aristotélicienne du continu le fruit d'une « révolte à l'égard de Platon », celle du géomètre « contre l'impérialisme de

---

[1] Ce lien de filiation d'Euclide à Cantor et Dedekind mérite d'être précisé. L'adhésion à l'idée d'une ligne continue sans épaisseur (et d'un infini en acte) n'entraîne pas, *a priori*, que celle-ci est composée de points (Cantor) ou de coupures (Dedekind) et ne se réduit donc pas, *strictu senso*, à une inscription dans l'épure ensembliste à la Cantor-Dedekind. Toutefois, le diptyque continu sans épaisseur et infini actuel, non seulement, offre l'hospitalité à un continu à la Cantor-Dedekind (les points étant obtenus par intersection des lignes) mais, de plus, contraint les autres constructions (topologie « sans points », topoï, locales, …) à en être largement prisonnières (voir Section 4). Il y a, entre celles-ci et celle-là, moins une différence de niveau de généralité qu'une différence de niveau d'abstraction.

La construction de Dedekind est, si l'on en croit les exégètes, plus géométrique que celle de Cantor, la notion de coupure renvoyant à celle de « bord ». Mais, d'une part, la notion de coupure chez Dedekind présuppose celle de point (son *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872, le montre) ; d'autre part, si une ligne est un ensemble de coupures, donc de bords, de quoi chaque bord est-il le bord ? Le bord ne peut pas précéder ce dont il est le bord.

l'arithméticien », d'une révolte contre la générativité discrète. Mais, dans le même mouvement, Thom fait d'Aristote, contre toute vraisemblance, un précurseur de la topologie moderne (c'est-à-dire au sens mathématique du terme), laquelle ne peut se déployer qu'au sein de la théorie des ensembles en lui empruntant sa vision du continu. Les origines ensemblistes de la topologie lui interdisent, en effet, à supposer que cela soit sa vocation, de conduire à une véritable « respatialisation» du géométrique. Nous reviendrons sur ce point, délicat mais crucial pour notre propos, de l'impossibilité pour la topologie, même dans ses différentes généralisations, de s'affranchir du continu cantorien. Remarquons simplement, pour se convaincre de cet improbable point de basculement dans la pensée de Thom, que la figure tutélaire de ce dernier est immanquablement invoquée – et ce à juste titre – par les dynamicistes en sciences physiques et en sciences cognitives.

Si les approches dynamicistes en sciences cognitives sont de facture topologico-dynamique et s'inscrivent ainsi dans l'épure du continu cantorien (y compris dans des domaines comme la linguistique où une intuition superficielle pourrait plaider pour des approches plus discrètes, notamment de la sémantique), c'est évidemment en raison de la puissance de feu de l'arsenal de la topologie différentielle. Mais c'est également en creux que l'adhésion à ce paradigme se dessine. En effet, que le continu s'impose à la modélisation en sciences physiques et en sciences cognitives n'implique pas que ce continu soit de facture cantorienne. S'il en va ainsi c'est, pour partie, en réponse au discrédit du cognitivisme et au rejet du constructivisme dont ce dernier est porteur.

Il n'est plus nécessaire aujourd'hui de procéder à la critique de l'option (on n'ose plus parler de « paradigme ») cognitiviste dont le crédit est désormais épuisé. Rappelons, toutefois, que le cognitivisme, défini comme un fonctionnalisme computo-représentationnel, est arrimé au concept de représentation et que ce dernier a partie liée, notamment, avec un certain type de rationalité constructive : les objets sur lesquels une représentation peut opérer sont construits, c'est-à-dire, en l'occurence, engendrés par un ensemble de règles. Ce « constructivisme », qui prend sa source dans le pythagorisme et dont le cartésianisme constitue la figure philosophique dominante, est l'une des manifestations du mentalisme et du dualisme (la distinction entre l'idée et ce qu'elle représente) de l'option cognitiviste (dont Fodor et Chomsky furent les principaux artisans), mais dont le simple énoncé suffit à établir qu'elle est étrangère aux constructivismes mathématiques à l'élaboration desquels la conception aristotélicienne du continu a contribué.

Cet échec des approches (logicistes, mentalistes, dualistes et réductionnistes), regroupées sous l'appellation de cognitivisme, a donné du lustre aux approches naturalisantes venues les concurrencer à partir du milieu des années 1980. Les modèles mathématiques que ces dernières annexent sont les modèles d'auto-organisation de la deuxième cybernétique, les modèles physiques de l'émergence des formes et les modèles dynamicistes de la théorie des catastrophes de Thom et Zeeman.

Au-delà des divergences entre les approches qui se réclament de ce courant de recherches (Petitot *et al*, 1999, voir également les contributions dans cet ouvrage), un certain nombre de traits caractéristiques se dégagent. Le trait principal est leur inspiration phénoménologique. Aussi les approches dynamicistes et émergentistes se trouvent-elles d'emblée confrontées à une contradiction : la phénoménologie s'étant originellement constituée dans une opposition au naturalisme, comment ces approches peuvent-elle intégrer une approche scientifique du vivant ? Dans le domaine de l'étude des phénomènes mentaux, la phénoménologie, eu égard aux critiques du « naturalisme », constitue d'ailleurs un recul par rapport à l'aristotélisme. La conception hylémorphique (forme / matière) d'Aristote est plus immédiatement compatible avec les concepts de la biologie et de la psychologie que ne l'est la vision phénoménologique. Le couple forme-matière permet, en effet, de penser le complexe corps-esprit dans un cadre intégré, les deux pôles du couple étant pris dans une relation fonctionnelle. Ce « fonctionnalisme » aristotélicien est l'inverse du fonctionnalisme contemporain : alors que, pour ce dernier, le mental est une fonction du (neuro)biologique, pour l'hylémorphisme, c'est, à l'inverse, le biologique qui est une fonction du mental[2]. Cette conception autorise une vision intégrée du mental et du cérébral, donc une vision globale du biologique et du psychologique. Par ailleurs, n'étant pas fondé sur une épistémè du sujet, le fonctionnalisme aristotélicien offre l'hospitalité à une démarche externaliste, c'est-à-dire susceptible d'intégrer la vie biologique, mentale et sociale de l'homme, donc « naturaliste », au sens péjoratif dans lequel Husserl utilise ce terme. La phénoménologie husserlienne (ou d'ailleurs merlo-pontyennne), de par l'application de ses principes épistémologiques fondamentaux, sape *a priori* toute démarche externaliste (Schaeffer, 2007).

Le fonctionnalisme dynamiciste, qui s'est constitué sur le rejet du fonctionnalisme logique, se caractérise, notamment, par ses modèles mathématiques empruntés à la théorie des systèmes dynamiques, la théorie des singularités, la théorie des catastrophes, etc. Mais il ne s'agit pas, en l'occurrence, d'un simple emprunt : les outils mathématiques sont des constituants de l'approche dynamiciste. Il s'agit, en effet, de se réapproprier, dans une perspective naturaliste, une philosophie dont la perspective est résolument anti-naturaliste, de rendre compte du mental au sein du monde des sciences naturelles, particulièrement les neurosciences. Un point de passage obligé est la remise en cause du clivage, postulé par Husserl, entre sciences exactes et sciences descriptives. Husserl, dans *Ideen I*, distingue en effet les sciences exactes, déductives, mathématisables, où se rangent les mathématiques, la logique et la physique, des sciences descriptives, non mathématisables, telles l'histoire, la géographie ou les sciences du vivant. Cette distinction s'appuie sur deux arguments. Selon Husserl, la distinction entre sciences exactes et sciences naturelles n'est pas seulement

[2] A rebours de la phénoménologie husserlienne, le postulat fondamental de l'hylémorphisme est qu'il y a, immanent aux phénomènes, une nature. Celle-ci est dégagée par l'expérience et s'appuie sur une « contiguïté » de l'essence et du phénomène.

épistémologique ; elle a également une signification ontologique : elles diffèrent les unes des autres non seulement par leurs méthodes mais également par le fait que leurs domaines d'objets ont des structures « formelles » essentiellement différentes. Par ailleurs, le point crucial de la thèse de Husserl est que la phénoménologie n'est pas une science exacte déductive, c'est une « théorie des essences immanentes », science idéale, nomologique, qui établit des lois mais qui pourtant est une science descriptive, non une science exacte. C'est cette thèse que les approches naturalisantes s'attachent à rejeter. Il s'agit de mathématiser la phénoménologie, d'en faire une discipline axiomatisable, de façon à combler la distance entre phénoménologie et sciences exactes. La stratégie consiste donc à mathématiser la phénoménologie de sorte que le statut épistémologique et méthodologique de celle-ci soit affine à celui des mathématiques et de la physique. C'est la géométrie qui, dans cette stratégie, joue un rôle central. La géométrisation est la clé de la naturalisation parce que la géométrie est une science transcendante (tout objet étendu spatialement est transcendant, en accord sur ce point avec Husserl) et qu'il n'y a pas de mathématisation possible des phénomènes immanents (Séron, 2006).

Les approches naturalisantes posent de multiples problèmes qu'on ne peut, ici, qu'effleurer. Notons, tout d'abord, que l'opposition de Husserl à la naturalisation de la phénoménologie n'est pas une opposition à sa mathématisation. Pour lui, le qualificatif « mathématique » renvoie, en effet, à un type épistémologique mais ne relève pas d'une région ontologique, de telle sorte que la différence entre sciences exactes et sciences descriptives est indépendante de la distinction entre le transcendant et l'immanent. La naturalisation de la phénoménologie n'est donc nullement, du moins de point de vue husserlien, une naturalisation. De plus, l'ambition de naturaliser l'eidétique des vécus purs (« cœur dur » du projet husserlien) et, par suite, la nécessité d'interpréter le transcendantalisme de Husserl comme un type d'idéalisme platonicien ne heurtent-elles pas une donnée essentielle de la phénoménologie husserlienne qui, en tant que science des essences, a vocation à mettre la psychologie à l'abri d'une naturalisation de la conscience ?

Enfin, pour caractériser la relation entre les substrats neurobiologiques et la conscience, la notion d'émergence, que les approches naturalisantes sont contraintes d'invoquer, semble tout aussi problématique que celle de causalité qu'elle est censée remplacer. La notion d'émergence est introduite pour expliquer la genèse des propriétés physiques irréductibles à celles des niveaux sous-jacents, mais cette explication en termes d'émergence n'élimine-t-elle pas précisément les caractéristiques phénoménales de la conscience ?

Pour aller au devant des sciences de la nature, en intégrant à la phénoménologie une pensée du vivant et les modèles physico-mathématiques qui en sont solidaires, ces démarches naturalisantes n'ont-elles pas laissé en chemin tout ou partie de la phénoménologie ? Inversement, ces modèles nous apprennent-ils quelque chose du vivant ?

2.2 Ce qui nous importe, ici, c'est que les approches naturalisantes sont indissociables de (pour ne pas dire « isomorphes » aux) modèles physico-mathématiques qui les fondent.

Les quelques remarques critiques qui précèdent nous placent ainsi à l'articulation de deux types de problèmes : ceux qui naissent de l'impossibilité de modéliser adéquatement le continu sous-jacent aux processus physiques, cognitifs, etc. au moyen du continu mathématique ; ceux, intramathématiques, qui peuplent les théories axiomatiques des ensembles et qui mettent en évidence (et qui sont mis en évidence par) le platonisme qui fonde philosophiquement les approches dynamicistes.

Sur le premier volet, rappelons que c'est précisément en raison de sa conception de l'espace comme « inscrit » dans l'action et le mouvement que Poincaré en est venu à contester le continu sans épaisseur et l'infini en acte. En accord, donc, avec Riemann (« la géométrie est une science de l'espace ») et plus encore avec Poincaré (« la géométrie est une science du mouvement dans l'espace ») et Thom – avant que ces deux derniers ne basculent dans la « topologisation » de la géométrie –, une trajectoire d'un système dynamique, à l'instar d'une quelconque ligne continue, est nécessairement dotée d'une certaine « épaisseur », non pas parce que représentée par son tracé sur une feuille ou au tableau, mais parce qu'inconcevable sans une matérialisation (une incarnation) potentielle : il n'y a pas de mouvement dans l'espace qui ne soit pas le mouvement de quelque chose dans l'espace.

Réciproquement, pour ce qui concerne la possibilité de fonder cognitivement la géométrie, du moins au sens où Berthoz (2001) l'entend, c'est-à-dire si la géométrie est, conformément à l'analyse de Poincaré, le reflet du cerveau vivant, qu'elle acquiert son universalité du fait qu'elle consiste en un système de signes qui évoque, chez tous, la même action (l'adéquation du signe et du fonctionnement cérébral transcendant les langues), alors deux conclusions s'imposent.

D'une part, si les fondements cognitifs de la géométrie sont inclus dans le fonctionnement du cerveau (admettons !), que le corps et l'action ont joué un rôle clé dans les processus mentaux qui ont permis son apparition, les concepts géométriques doivent obéir à une certaine forme de constructivisme.

D'autre part, si l'on convient, à la suite de Poincaré, que la position d'un objet est liée au geste que le sujet effectue pour s'en saisir, la trajectoire réalisée est indissociable de la partie du corps impliquée dans l'effectuation du geste. Il en va de même de la trajectoire de poursuite d'un prédateur. En effet, la perception est multisensorielle et c'est une structure particulière du cerveau, le colliculus supérieur, qui permet la coopération entre les différentes modalités sensorielles. Le colliculus supérieur participe donc à la réalisation, par le cerveau, de la fusion multisensorielle et de l'extraction de signaux pertinents. Il contrôle, entre autres, les réactions d'orientation et d'évitement. Il est donc une structure à la fois sensorielle et motrice qui guide l'exécution et la correction des mouvements réalisés par les différents effectueurs (yeux, tête, tronc, membres, …). Le colliculus est donc impliqué dans l'anticipation et la prédiction motrice. Si, donc, la perception est une simulation de l'action et une anticipation des conséquences de l'action, le corps du prédateur fait partie intégrante de la trajectoire de poursuite de sa proie (tracée par la saccade oculaire), à défaut de quoi les stratégies d'orientation et d'évitement ne pourraient pas être mises en œuvre. L'« épaisseur » du corps du prédateur fait ainsi partie de sa mémoire de l'action. De même, quand le champion de ski simule le décours de son trajet sur la piste, son cerveau vérifiant de façon intermittente la conformité de l'information délivrée par ses capteurs sensoriels à sa prédiction, il va de soi que la trajectoire simulée intègre le corps du skieur. Le choix de la trajectoire se fait sur la base de données proprioceptives, donc sur la base de la perception de la position et des mouvements du corps. Si, pour produire et contrôler des mouvements, le cerveau utilise un processus de réactualisation dynamique utilisant un mécanisme de « mémoire dynamique », il faut introduire le corps en action dans les théories concernant la mémoire de l'espace. Dans une théorie dynamique basée sur la mémoire de l'action, le cerveau ne peut être déconnecté du corps sensible. De plus quand le cerveau mémorise (ou simule) une trajectoire, il prend en compte une dynamique globale de la trajectoire, non le déplacement d'un point sur une ligne. L'« épaisseur » du corps ou de la partie du corps impliqué(e) dans la trajectoire simulée interdit à cette dernière d'être sans « épaisseur » et constituée d'une infinité de points.

Sur le second volet, le platonisme « transcendantal » dont se réclament les approches dynamicistes ne doit pas être pris au sens d'un platonisme naïf, c'est-à-dire d'un réalisme ontologique, mais au sens d'une objectivité des mathématiques (objectivité des idéalités mathématiques ainsi que du rapport entre celles-ci et les formes d'objectivité externe, en particulier physique). Pour le dire dans une terminologie husserlienne, les idéalités mathématiques ne sont pas des entités susceptibles d'être interprétées ontologiquement ; ce sont des « idéalités noématiques […] dépendantes des synthèses noétiques corrélatives » (Petitot, 1995).

Le platonisme de stricte obédience (de Cantor à Connes), en vertu duquel les concepts mathématiques nous sont extérieurs et s'imposent à l'entendement du mathématicien, fait de ce dernier une sorte de grand prêtre en prise directe avec le monde des Idées, monde dont le rapport à celui des phénomènes est pour le moins énigmatique. Pour éviter les pièges et apories de ce réalisme ontologisant qui identifie constitution transcendantale et transcendance, le platonisme « transcendantal », c'est-à-dire d'obédience kantienne, est toutefois contraint de river les structures mathématiques à des structures innées, inhérentes au sujet[3].

[3] Approche affine à celle, exprimée avec « force » (on nous permettra cet euphémisme) par Châtelet (1997), qui, dans *Les enjeux du mobile*, invoque le physico-mathématique, un néologisme (il s'agit bien d'un substantif) par lequel l'auteur entend affirmer l'unité des mathématiques et de la physique : les mathématiques seraient constitutives du concept même de réalité physique. Ce physico-mathématique, dont l'acte de naissance porterait le nom de calcul différentiel, se traduit notamment par une

Le problème central devient celui des relations entre mathématiques et objectivité, en particulier celui de faire droit à une définition du continu intuitif pur et d'en fournir un modèle mathématique au sein d'une théorie ensembliste « désontologisée ». Or, l'élaboration d'une telle théorie du continu (permettant d'interpréter ce dernier comme une forme d'objectivité) passe par une extension de la théorie des ensembles en des termes tels qu'il est difficile de ne pas y voir une fuite en avant consécutive à l'impossibilité pour ZFC de maîtriser le continu. On sait qu'il faut abandonner tout espoir de montrer que la théorie des ensembles est exempte de contradictions, donc de montrer l'existence d'un modèle de ZF, et que l'on peut, au mieux, démontrer sa non-contradiction relative (si ZF est cohérent, c'est-à-dire non contradictoire, elle l'est encore si l'on y ajoute certains axiomes, comme l'axiome du choix). Les résultats de Gödel sur la non-contradiction relative de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu et ceux de Cohen sur l'indépendance de ces deux axiomes ont ainsi conduit à de nombreux développements de la théorie des ensembles : la méthode du forcing (résultats de cohérence relative), la théorie des grands cardinaux, l'axiome de détermination (voir, par exemple, les résultats sur la détermination des jeux boréliens), la théorie descriptive des ensembles (où le continu est appréhendé en se plaçant dans la topologie réelle des espaces polonais), etc. Mais, pour ce qui concerne la maîtrise du continu, ces diverses extensions posent autant de problèmes qu'elles n'en résolvent. La question de savoir, par exemple, quels axiomes il conviendrait d'ajouter à ZFC pour prouver ou réfuter l'hypothèse du continu (HC)[4] reste ouverte. S'il a longtemps été admis que la théorie des grands cardinaux pourrait suffire à fournir une réponse, ce point de vue est désormais remis en cause. Les résultats les plus récents (et les plus prometteurs), à savoir l'Ω-logique de Woodin (2001), conçue pour dépasser les limites du forcing[5], ne permet d'établir, en dépit d'un tour de force mathématique, que des résultats somme toute limités : la vérité de l'Ω-conjecture entraînerait la fausseté de HC. Autrement dit, s'il n'existe pas de cardinaux d'un type différent de ceux considérés à ce jour, tout axiome neutralisant le forcing jusqu'à $\aleph_1$ permet d'établir la fausseté de HC. Ainsi, si l'Ω-conjecture est fausse, outre que cela n'implique pas que HC soit vraie, la fuite en avant vers de « nouveaux » grands cardinaux doit reprendre ;

---

géométrisation de la physique (au sens maximalement fort de l'expression, c'est-à-dire en ceci que la distinction entre objets physiques « concrets » et objets géométriques « abstraits » est récusée). Aux réticences que suscite le concept même de physico-mathématique, s'ajoutent celles concernant sa proximité supposée à la dynamique leibnizienne. Leibniz, en effet, a toujours soutenu l'idée que la notion de quantité infinitésimale n'avait aucun caractère réel et qu'il était donc impossible de considérer la différentielle exprimant la vitesse instantanée comme l'essence formelle de la force vive. Plus généralement, Leibniz, s'est employé à introduire dans l'étude des fondements des concepts de la dynamique des considérations non purement mathématiques et des principes qui dépassent les contraintes de la géométrie.

[4] Ce que montrent les théorèmes d'indécidabilité n'est pas que HC n'est ni vraie ni fausse, mais simplement que ZF (ou ZFC) n'épuise pas les propriétés des ensembles et qu'il faut le compléter. Rien n'empêche, *a priori*, d'espérer ajouter à ZFC un ensemble d'axiomes permettant de prouver ou de réfuter HC.

[5] Notamment l'indistinguabilité entre HC et sa négation introduite par celui-ci.

si l'Ω-conjecture est vraie alors HC est fausse, auquel cas la maîtrise axiomatique du continu (quid des cardinaux compris entre deux alephs) deviendrait quasiment inaccessible.

Les formes intuitives de donation et de présentation de l'objectivité, tels que le temps et l'espace, étant fondées dans la forme première qu'est le continu, le point d'appui de ce platonisme semble bien fragile.

La théorie des ensembles et ses diverses formalisations et extensions, en postulant que le continu géométrique peut être paramétré par la droite réelle et en promouvant ainsi l'idée d'un continu atomique et d'un infini en acte, réintroduit, *volens nolens*, une générativité discrète qui ouvre la porte à une cascade de paradoxes (chaque tentative de contrer un paradoxe conduisant à un ou plusieurs autres) et qui obère ainsi la mathématisation du continu (dont Thom disait avoir rêvé). Un des enseignements de ce qui précède est que les paradoxes intra-mathématiques du continu (et de l'infini actuel) sont entièrement solidaires des paradoxes (et limitations) des modèles continuistes de la cognition qui fondent, ou sont fondés sur, ce continu mathématique.

3. Les constructivismes mathématiques

L'exigence de constructivité traverse l'histoire des mathématiques. La construction à la règle et au compas d'Euclide, la construction point par point des courbes géométriques de Descartes, l'idée de Kant que les mathématiques sont une construction de concepts dans l'intuition pure via le schématisme transcendantal sont autant d'étapes de cette histoire. L'exigence proprement constructiviste s'est développée, en premier lieu, sous l'influence de la méréologie de Husserl et Liesnewski puis sous l'impulsion décisive de l'intuitionisme développé par Brouwer et l'école française (Baire, Borel, Lebesgue et, dans une moindre mesure, Poincaré). C'est alors que s'est dessinée la ligne de clivage actualisme / constructivisme, ligne toutefois plus mouvante et poreuse qu'on ne l'imagine souvent. En effet, Heyting, Gentzen et Weyl se sont attachés à élargir les thèses brouweriennes ; Gödel est passé des thèses hilbertiennes (dont le finitisme est également une forme de constructivisme) à une forme de platonisme teintée d'intuitionisme (malgré la férocité de ses critiques à l'endroit de Brouwer) ; Poincaré et Kronecker ont adopté un point de vue semi-intuitioniste. Plus récemment, la perspective constructiviste a pris les traits de la fondation constructive de l'analyse non standard. Notons également que la théorie descriptive des ensembles, les « reverse mathematics » de Friedman, le programme de réécriture de l'arithmétique et de l'analyse de Feferman (1989), la logique IF d'Hintikka s'inscrivent à divers degrés dans cette perspective.

3.1 Méréologie. Méréotopologies

La méréologie, sous la forme axiomatique qui s'est imposée au vingtième siècle, est l'œuvre de Lesniewski (1927,1931), qui, à partir d'une critique de la théorie cantorienne des ensembles, source en particulier de l'antinomie de Russell ($x \in x$ ssi $x \notin x$), et de l'interprétation fonctionnelle de la prédication frégéenne, proposa de substituer aux notions d'ensemble et d'appartenance celles de « tout » et de « partie », ces deux primitives obéissant à un certain nombre de règles.

Si Lesniewski a fondé la méréologie comme formalisme rival du formalisme ensembliste, c'est néanmoins Husserl qui, avant lui, s'est efforcé, dans la troisième de ses *Recherches logiques*, d'élaborer une théorie formelle des concepts de tout et de partie. Héritier, sur ce point, de l'école brentanienne, notamment de la « méréologie psychologique » de Stumpf, Husserl invoque des couples comme « partie-tout », « abstrait-concret » ou « dépendant-indépendant », afin de déterminer les lois structurelles *a priori* qui régissent les rapports entre les morceaux hylétiques. Ce qui caractérise la démarche de Husserl c'est, d'une part, que les rapports partie-tout et les lois qui y interviennent reçoivent une valeur ontologique et s'appliquent non seulement aux actes mais aussi aux contenus perceptifs ou catégoriels et même aux types d'étants hors des domaines du corporel et du « spirituel » (Popescu, 2003) ; c'est, d'autre part et surtout pour notre propos, le fait que la « représentation de l'espace » dont la méréologie husserlienne est porteuse s'adosse à une critique, moins immédiatement décelable chez Lesniewski, de la conception du continu héritée des travaux de Cantor et Dedekind. Bien que contemporaine de ces derniers et de l'émergence des définitions du continu et de l'infini actuel, l'approche husserlienne manifeste son attachement au continu aristotélicien, une virtualité ne pouvant se définir comme l'agrégation de points actuels ou l'agencement de parties actuelles : les points et les parties ne sont que virtuels, non pas des constituants. Dans *Méditations cartésiennes*, Husserl affirme encore plus nettement son opposition à la possibilité d'une connaissance du continu. Si, en effet, connaître, c'est nommer, distinguer, conceptualiser, alors une connaissance du continu est, par principe, impossible puisqu'aucun constituant primitif ne se donne, sur lequel un discours de connaissance puisse s'appuyer.

Les diverses axiomatiques de la méréologie, héritées des travaux fondateurs de Husserl et Lesniewski, offrent des pistes pour la mathématisation de la façon dont nous sommes censés structurer qualitativement notre environnement, en procédant à une analyse descendante qui consiste à décrire l'organisation interne des objets de notre expérience sensible. Mais ces approches formelles ne permettent pas d'atteindre l'objectif fixé : limitée aux relations d'« inclusion » et de recouvrement, la méréologie a une expressivité très limitée. Elle n'est pas à même d'appréhender, par exemple, les notions de contact ou de contiguïté.

C'est à partir de cette constatation que de nombreux auteurs ont proposé, à la suite de Whitehead (1916), d'enrichir l'axiomatique de la méréologie d'une primitive de connexion, donc d'adjoindre à la méréologie certains outils de la topologie. Ces approches, regroupées sous le terme générique de méréotopologie, ont donné lieu à une multitude de travaux et d'axiomatiques. Le modèle de Cohn et Varzi (1999, 2003) offre, toutefois, un modèle canonique au sein duquel ces diverses axiomatiques peuvent être appréhendées et comparées les unes aux autres. Ce modèle consiste en la donnée d'un couple $\langle A, T(c)\rangle$ où A est un ensemble non vide et c un opérateur d'adhérence (ou de fermeture). L'ensemble $T(\mathrm{c}) = \{x \subseteq A : c(x) = x\}$ est la cotopologie sur A associée à c, c'est-à-dire l'ensemble des fermés de A. L'intérieur $i(x)$ d'un ensemble x est défini par $i(x)^* = c(x^*)$, où x^* désigne le complémentaire de x, et l'ensemble $\{x \subseteq A : i(x) = x\}$ est la topologie correspondante. La frontière d'un ensemble x est définie par $b(x) = c(x) \setminus i(x)$. La primitive topologique de connexion C dans $\langle A, T(c)\rangle$ obéit à l'une des trois définitions suivantes :

$C_1\, x\, y$ ssi $x \cap y = \varnothing$,

$C_2\, x\, y$ ssi $c(x) \cap y = \varnothing$ ou $x \cap c(y) = \varnothing$,

$C_3\, x\, y$ ssi $c(x) \cap c(y) = \varnothing$.

La primitive P de partie peut alors être définie au moyen de celle de connexion :

$$P_i\, x\, y \text{ ssi } \forall z\, (C_i\, z\, x \rightarrow C_i\, z\, y),\ i = 1, 2, 3.$$

En clair, x est une partie de y ssi, pour tout z, z est connecté à y dès lors que z est connecté à x. Il y a donc potentiellement neuf combinaisons possibles (P_i, C_j), $i, j = 1, 2, 3$, toutes légitimes *a priori*.

Toutefois, comme démontré dans (Breysse & De Glas, 2007), ces définitions conduisent à des résultats contre-intuitifs et, partant, irrecevables du point de vue de la recherche d'une saisie intuitive du spatial à laquelle la méréotopologie est consacrée :

(i) Si P est définie par P_2, la frontière de toute région est une partie de son complémentaire : $\forall x\, P_2\, b(x)\, b(x)^*$.

(ii) Si P est définie par P_3, il existe des régions dont l'intérieur et l'extérieur ont un recouvrement non vide : $\exists x\, O\, i(x)\, e(x)$, où $e(x) = i(x^*)$ est l'extérieur de x et O désigne l'opérateur de recouvrement, $O\, x\, y$ ssi $\exists z\, (P_3\, z\, x \wedge P_3\, z\, y)$.

(iii) Si C est définie par C_1, l'espace est totalement discontinu.

(iv) Si C est définie par C_3, il existe des régions dont l'intérieur et l'extérieur sont connectés : $\exists x\, C_3\, i(x)\, e(x)$.

Ces résultats hautement contre-intuitifs se renforcent, si l'ose dire, de corollaires dont le seul énoncé vaut discrédit des hypothèses qui les fondent. Tout d'abord, puisque le complémentaire de tout ouvert dense est un ensemble frontière (un ensemble qui coïncide avec sa frontière), il s'ensuit de (i) que, sous l'hypothèse P_2, le complémentaire de toute région dense x est une partie de x : $P_2\, xx^*$. En outre, les seules régions qui n'obéissent pas à l'énoncé de (iv) sont les ouverts-fermés. Ainsi, sous l'hypothèse C_3, l'opérateur de connexion ne fait-il sens que si l'espace sur lequel il est défini est non connexe.

Seul le couple (P_1, C_2) semble devoir échapper à la critique. C'est d'ailleurs celui qui, selon les méréotopologistes, présente le plus d'intérêt. Toutefois, comme prouvé dans (Breysse & De Glas, 2007),

(v) Les méréotopologies de type (P_1, C_2) sont contradictoires.

Nous démontrons, en fait, qu'il existe des ensembles x tels que, dans (P_1, C_2), $i(x) \neq i(x)$[6].

Les méréotopologies s'avèrent donc impuissantes à définir le concept de connexion de manière satisfaisante et les différentes théories (P_i, C_j) conduisent soit à des résultats paradoxaux soit à des incohérences logiques. Plus généralement, les méréotopologies, sauf à éliminer la notion de frontière de leur champ d'investigation (et être ainsi conduites à des théories vides de sens), sont condamnées aux paradoxes et aux incohérences et à laisser ouverts les problèmes qui leur donnèrent naissance : la modélisation des notions de contact et de contiguïté. *A contrario*, si les objets du monde « réel » sont, comme l'affirme Thom, (modélisés par) des fermés de $\mathbf{R}^4$ – comment, en effet, un objet pourrait-il ne pas contenir sa frontière ? –, le contact entre deux objets ne peut avoir lieu que si les deux fermés correspondants sont non disjoints : le livre que je lis contiendrait donc des « morceaux » du bureau sur lequel il est posé. À défaut, le contact ne peut pas avoir lieu puisque, si les fermés sont disjoints, la distance entre les deux objets est non nulle.

Il est clair que cette situation est entièrement imputable à la topologie. Sans doute n'est-ce pas un hasard (et la méréotopologie a, au moins, le mérite de servir de révélateur) si les notions intuitives de contact et de contiguïté, pourtant éminemment topologiques – au sens étymologique du terme –, et pointées déjà comme cardinales par Aristote, n'ont jamais été appréhendées par les topologistes. La méréologie, en dépit ou à cause de la pauvreté de son appareillage axiomatique, est vierge de tels travers. C'est l'adjonction du concept de connexion (plus exactement, le fait de contraindre cette notion à rentrer dans un cadre topologique) qui est la source des problèmes, insolubles, posés par les méréotopologies et qui fait « retomber » ces dernières dans les ornières ensemblistes dont la méréologie s'était donné pour ambition de s'affranchir.

Nous verrons que l'inadéquation de la topologie à la mathématisation de l'espace – et ce indépendamment de la méréologie – s'ancre au plus profond de la discipline, dont les concepts fondamentaux (voisinage, adhérence, intériorité, continuité, …) offrent un modèle grossier et, dans certains cas, paradoxal des notions intuitives sous-jacentes.

3.2 L'intuitionisme

Saisir les enjeux de l'intuitionisme exige d'en restituer les actes fondateurs, au début du vingtième siècle, à un moment où la crise des fondements posa, en des termes inédits, les problèmes de l'existence et de la nature des objets mathématiques. Pour les intuitionistes (Brouwer, 1923, 1925, 1929), les mathématiques se fondent sur l'intuition qui permet au mathématicien de construire des structures avec exactitude sans jamais perdre leur sens de vue ; puisque les mathématiques sont construites par les mathématiciens, ses

---

[6] L'opérateur i obéit à deux définitions qui, contrairement à ce que laisse entendre la littérature méréotopologique, ne sont pas équivalentes. L'erreur vient d'une confusion entre un max et un sup.

principes fondamentaux demeurent irréductibles à des règles mécaniques d'écriture. Mettre l'intuition au premier plan est pour Brouwer une façon de dénoncer la tradition formaliste qui, elle, met l'accent sur l'axiomatisation et la construction abstraite des mathématiques. L'exactitude des mathématiques provient, chez les formalistes (Hilbert, 1927) du déploiement des mathématiques « sur le papier » tandis qu'elle est le fruit pour l'intuitioniste de l'esprit humain, par l'auto-déploiement des mathématiques à partir de l'intuition originaire. Il n'y a, dans les fondements de l'intuitionisme, ni langage, ni aucun objet mathématique existant en soi. Dans l'épure intuitioniste, les mathématiques se développent à partir de la seule expérience de l'intuition et il n'y a jamais l'affirmation d'une réalité mathématique extérieure à l'esprit. Ainsi, s'il existe des objets, leur existence découle de la pensée qui s'enracine dans l'intuition originaire. Le recours à l'intuition permet à Brouwer d'établir des principes servant de fondement aux mathématiques et de discuter la pertinence des principes logiques au regard des constructions effectuées par le moyen de l'intuition.

L'intuition permet d'accéder à la raison d'être d'un résultat, c'est-à-dire à son sens. L'établissement d'une preuve formelle exige, non seulement, des étapes intermédiaires s'opposant à l'immédiateté de l'intuition, mais, de plus, la possibilité de développer une science ne reposant que sur des signes et des écritures sans lien avec l'intuition, « fondement et source de toute vérité ». La démonstration constructiviste consiste donc en une construction analogue à une figure géométrique qui, si elle demande du temps pour être élaborée, permet, lorsqu'on y est parvenu, de percevoir la vérité. L'intuition est, pour Brouwer, une méthode : elle permet, grâce à ses perceptions, d'établir des vérités. Elle est donc active. L'affirmation d'une activité de l'intuition est d'ailleurs déjà présente chez les pré-intuitionistes (Borel, Baire, Lebesgue, Poincaré, Lusin, Fréchet), et est un principe fondamental chez Poincaré : l'intuition pure « permet non seulement de démontrer, mais encore d'inventer » (Poincaré, 1905).

En présupposant l'existence de réalités mathématiques sans que l'on puisse donner sens à ces réalités, faute d'intuition les percevant, le réalisme rend aveugle. Le refus du réalisme interdit les résultats d'existence non fondés sur une construction permettant d'exhiber un objet et, par suite, le tiers exclu. Pour les intuitionistes, le principe du tiers exclu dit plus qu'il ne peut prouver : il admet la vérité d'une disjonction sans établir lequel des deux termes de la disjonction est vrai. Le rejet du tiers exclu reviendrait ainsi au rejet de la résolubilité de tous les problèmes mathématiques (le tiers exclu étant, sinon en fait, du moins en droit, un principe d'omniscience) et de la possibilité de déduire la vérité de la non contradiction.

Toutefois, la position de Brouwer sur le tiers exclu fait problème en ce qu'elle repose moins sur l'examen du sens du tiers exclu considéré en lui-même que sur la place que ce principe prend au sein du projet formaliste. Jamais Brouwer ne distingue le tiers exclu de son écriture formaliste, ce qui, lorsque l'on retrace l'histoire de ce principe, ne laisse pas de surprendre.

Il convient, en effet, de distinguer le sens du tiers exclu considéré en lui-même, en dehors de toute inscription dans un système formel, de l'axiome du tiers exclu admis au sein de la logique classique. Pour que l'argumentation de Brouwer soit pertinente, il faut supposer que le tiers exclu signifie qu'une proposition *p* quelconque est actuellement vraie ou fausse. Autrement dit, il faut que le tiers exclu s'accompagne d'une position réaliste sur la vérité, la vérité de *p* ne pouvant être pensée comme simplement indéterminée. Or, un mathématicien au travail, qui admet le tiers exclu, n'abandonne pas pour autant l'idée qu'il effectue des constructions mathématiques dont découlent ses résultats. Sinon, il considèrerait qu'il peut établir n'importe quel résultat, autrement dit que la vérité existe et demeure à sa portée. Le mathématicien au travail ne serait séparé de la vérité que par le temps mis pour l'explorer et la démonstration par l'absurde deviendrait une méthode universelle pour prouver la vérité. La critique brouwerienne du tiers exclu s'appuie donc sur des présupposés contredits par le sens du tiers exclu. Parce qu'il l'interprète indûment comme un principe engageant dans le réalisme, Brouwer rejette le tiers exclu, mais ce rejet ne vise en fait, et l'examen des contre-exemples de Brouwer le confirme, que l'inscription du tiers exclu au sein du formalisme.

L'examen du sens du principe du tiers exclu tel qu'il apparaît avant le développement du formalisme, nous conduit aux textes d'Aristote qui montrent la nécessité de ce principe, en particulier *Métaphysique Γ* et *De l'Interprétation*. Sortir du point de vue formel permet, notamment, de comprendre l'inscription du tiers exclu au sein des futurs contingents : la solution aristotélicienne consiste à distinguer l'être en acte et l'être en puissance. Le tiers exclu permet de penser en logique l'indétermination en affirmant que toute détermination ne peut se faire qu'au sein de la bivalence : construire un résultat, c'est le démontrer, et toute démonstration en détermine la valeur de vérité. Il est donc impossible d'interpréter le tiers comme principe d'omniscience et Brouwer commet un contresens qui rend impensable le sens qu'Aristote lui donne.

Le principe du tiers exclu exprime la détermination en puissance de l'objet du discours. Il signifie, en effet, qu'il n'est pas impensable de déterminer si un sujet possède ou non un prédicat donné, c'est-à-dire que l'on prenne cette détermination comme l'objet d'une démonstration à construire. Si cela devient impensable, alors on peut concevoir un être n'étant ni blanc, ni non blanc, et qui trouve sa détermination, relativement à la couleur, par une autre qualité. Mais, si cet être existait, le même raisonnement permettrait de penser un être qui n'a aucune couleur et qui n'est pas sans couleur. Autant dire que la réalité de cet être serait insaisissable et toujours fuyante : on ne pourrait jamais en saisir les qualités. Dès lors qu'ils ne vérifient pas le tiers exclu, les étants se multiplient en effet et la vérité perd sa signification, puisque nous devenons incapables de viser la moindre réalité, les étants échappant à toute détermination du langage. Le tiers exclu affirme la possibilité de viser la connaissance des qualités permettant de distinguer les étants. Il exige donc que l'on connaisse dans quel monde on se situe et quelles sont les propriétés par lesquelles un objet est déterminé.

En reconnaissant l'existence d'une (connaissance de la) réalité en puissance dont on pourra chercher à connaître les déterminations, le tiers exclu n'engage donc en rien dans une position réaliste, où chaque objet possède en acte ses déterminations avant qu'on n'en prenne conscience. Il exprime simplement que la vérité du langage concerne un objet qui, réel ou non, n'échappe pas aux déterminations permettant d'en acquérir la connaissance.

Comment ces critiques de l'intuitionisme (donc de ses trois piliers : rejet du tiers exclu, de certains théorèmes d'existence, de l'équivalence entre vrai et non contradictoire, …) se traduisent-elles dans le cadre de la logique intuitioniste ? Pour répondre à cette question, il convient, en premier lieu, de circonscrire cette dernière (Heyting, 1930, Glivenko, 1928, Kolmogorov, 1929)[7] et d'en évaluer les apports.

La théorie intuitioniste de la preuve fournit au constructivisme un fondement logico-mathématique. Le paradigme « preuves comme programmes » permet, à partir des travaux fondateurs de Gentzen (et l'élimination des coupures) et de la correspondance de Curry-Howard d'établir les liens entre logique intuitioniste, λ-calcul et informatique (Krivine, Martin-Löf, Girard). La correspondance de Curry-Howard établit, en effet, l'identité de la conversion des preuves en preuves analytiques et de l'évaluation des programmes en λ-calcul simplement typé. Cette identité entre preuves et programmes (et λ-termes) se prolonge en une série d'identités : preuve = programme, règle = instruction, formule = spécification, élimination des coupures = exécution, preuve sans coupure = résultat. Les processus de normalisation et d'élimination des coupures sont désormais centraux en théorie de la preuve et dans la définition de l'interface entre logique et informatique théorique.

Par ailleurs, les sémantiques algébriques, topologiques et catégoriques de la logique intuitioniste ouvrent vers une mathématique intuitioniste à laquelle la théorie des topoï (créée indépendamment de l'intuitionisme) offre un puissant réceptacle. La notion de topos, initialement introduite par Grothendieck, en géométrie algébrique, permet de nommer les catégories de faisceaux associées aux généralisations catégoriques des espaces topologiques. De façon un peu plus précise, la catégorie des faisceaux sur un espace topologique possède un certain nombre de propriétés catégoriques fondamentales qui lui confère une structure de topos, structure catégorique permettant d'interpréter un langage des prédicats dans une catégorie d'objets. Cela permet de considérer la catégorie des faisceaux sur un espace topologique comme un univers de discours dont les objets sont des entités variables dépendant d'une localisation

---

[7] Une remarque historique s'impose ici : bien qu'opposé *a priori* à tout processus de formalisation, Brouwer considérait (contrairement à une idée reçue) la formalisation de la logique intuitioniste par Heyting et Kolmogorov comme plus remarquable que les théorèmes d'incomplétude de Gödel.

spatiale. Cette dépendance spatiale est constitutive des valeurs de vérité et possède donc une pertinence sémantique mais n'est toutefois pas directement perceptible dans la syntaxe (pour laquelle les faisceaux ne sont que des types logiques) et n'est donc pas syntaxiquement pertinente. Généralisée et axiomatisée ultérieurement par Lawvere (les topoï de Grothendieck devenant des cas particuliers de la définition générale), le concept de topos (une catégorie cartésienne fermée munie d'un classificateur de sous-objets) fournit un substrat catégorique à la logique intuitioniste.

Enfin, sur le plan philosophique, la formalisation de la logique intuitioniste permet d'éliminer le subjectivisme et le solipsisme de l'intuitionisme brouwérien pour ne conserver que le constructivisme originel de l'approche intuitioniste. Elle permet d'envisager, dans la lignée du constructivisme philosophique, de substituer à l'ontologie réaliste (ensembliste) une ontologie « opérationnelle ».

Revenons sur chacun de ces points, philosophique, logique et mathématique. Sur le plan philosophique, cette ontologie opérationnelle ne permet pas de s'affranchir d'un certain réalisme ontologique. Au sein de la logique, désormais conçue comme un processus de typage, comme police de l'évaluation, l'être calculatoire est second par rapport aux normes procédurales auxquelles l'évaluation doit obéir et qui déterminent l'être calculatoire en tant qu'objet mathématique autonome. Le réalisme resurgit sous la forme d'un réalisme de l'être calculatoire, appréhendé dans sa nature de processus dynamique et dont l'essence est le produit de la norme (Joinet, 2007).

Sur le plan logique, trois aspects de l'exigence intuitioniste méritent examen : la preuve de la disjonction, de l'implication et des propositions existentielles. Le rejet du tiers exclu tient à ce que la preuve d'une disjonction est définie comme une disjonction de preuves : l'interprétation dite BHK (Brouwer-Heyting-Kolomogorov) stipule, en effet, que π est une preuve de $p \vee q$ ssi $\pi = (\pi_1, \pi_2, n)$ où, pour $n = 0$, π_1 est une preuve de p et, pour $n \neq 0$, π_2 est une preuve de q. Aucun argument constructiviste ne plaide en faveur d'une telle exigence de commutation de la prouvabilité et de la disjonction. Cette exigence indue renvoie à l'interprétation fallacieuse d'Aristote par Brouwer : il est parfaitement loisible, pour un constructiviste, d'affirmer $p \vee \neg p$ sans qu'il soit possible d'affirmer (ou de prouver) ni p ni $\neg p$[8]. Pour ce qui concerne l'implication, une preuve intuitioniste de $p \rightarrow q$ est une transformation d'une preuve de p en une preuve de q. Mais la circularité inhérente à une telle définition conduit, sauf à verser dans la vacuité, à souscrire aux propos de Martin-Löf : la transformation (d'une preuve de p en une preuve de q) fait bien

[8] L'exigence de Brouwer concernant la disjonction est qu'on puisse transformer une preuve de $p \vee q$ en une preuve qui en soit une de p ou une de q (l'exigence réciproque : toute preuve de p est une preuve de $p \vee q$, étant, en accord sur ce point avec Girard (2002), sans intérêt et, en tout état de cause, prise en charge par la règle d'introduction de la disjonction). En revanche, contrairement à ce qu'affirme Girard, cette définition de la preuve de la disjonction équivaut, la contraposition étant méta-logiquement valide, au refus de la prouvabilité d'énoncés du type « n est pair ou impair » ou « la porte est ouverte ou fermée » en l'absence de preuve de l'un des deux termes de l'alternative.

ce qu'elle doit faire sans qu'il soit possible de le justifier (paroles d'intuitioniste !). Pour ce qui est, enfin, de la preuve de propositions existentielles du type $\exists x\, p(x)$, le fait d'exiger, en application des canons intuitionistes, que l'on soit à même d'exhiber un objet a tel que $p(a)$ pour que la preuve de $\exists x\, p(x)$ soit acceptable suppose que ce qui importe dans la preuve d'un énoncé n'est pas la connaissance (de la vérité de) cet énoncé mais celle d'objets mathématiques sur lesquels porte cet énoncé. Refuser de déduire l'existence d'un élément ($\exists x\, p(x)$) de la preuve de l'impossibilité de sa non existence ($\neg \forall x\, \neg p(x)$) et plaider pour l'éradication de ces entités « suspectes » qui doivent leur existence à l'impossibilité de leur non existence (d'où la forme un peu « ockhamienne » que prend souvent l'intuitionisme, Barot (2005)) revient à identifier la construction d'une preuve à la possibilité d'exhiber, de dévoiler, un objet – partant, à adhérer à une forme implicite, et paradoxale, de réalisme. Le glissement, qui s'opère ainsi, de la connaissance d'une vérité mathématique à celle d'objets mathématiques est parfaitement infondé : pourquoi l'établissement de la preuve d'un énoncé devrait-il contraindre le mathématicien à répondre à une question qui n'est pas posée ? [9] En outre, même si l'on souscrit à une telle exigence, pourquoi alors ne pas accepter le tiers exclu dans le cas propositionnel ?

De plus, la correspondance de Curry-Howard, donc le paradigme des preuves comme programmes, ne se limitent pas à la logique intuitioniste. Ils s'étendent (Griffin, 1995) à l'axiome du tiers exclu (ainsi d'ailleurs qu'à l'axiome du choix dépendant). On peut donc écrire un programme en λ-calcul (plus précisément dans un des dialectes de LISP, le langage SCHEME, basé sur le λ-calcul) dont l'une des instructions correspond au tiers exclu. Griffin a, en effet, démontré que l'on pouvait interpréter la loi dite de Peirce, $((p \to q) \to p) \to p$, équivalente au tiers exclu, par l'instruction d'échappement call/cc (*call with current continuation*). La possibilité de traduire le tiers exclu en λ-calcul sape l'accusation d'anti-constructivisme dont ce dernier serait le parangon. En ce sens, la logique intuitioniste n'est ni plus ni moins constructive que la logique classique.

À ces deux volets, épistémologique et logique, s'ajoute un volet mathématique. En effet, l'intuitionisme a fécondé, non seulement, la logique et la théorie des types, mais également la théorie des ensembles elle-même. Les

---

[9] Le théorème de Cantor, qui énonce que « pour tout ensemble X, X et $\wp(X)$ ne sont pas équipotents », c'est-à-dire qu'il n'existe pas de bijection de X sur $\wp(X)$, est accepté par les intuitionistes, car, l'énoncé étant négatif, sa preuve n'utilise pas, *stricto sensu*, le raisonnement par l'absurde. La preuve s'appuie, bien évidemment, sur la loi de la double négation, en vertu de laquelle la double négation de toute formule classiquement valide est « intuitionistiquement » valide, dont l'une des conséquences est la non-contradiction du tiers exclu, c'est-à-dire la validité intuitioniste de $\neg\neg(p \vee \neg p)$. Ce résultat, anticipé et déploré dès 1908 par Brouwer (« une théorie incorrecte, impossible à arrêter par une contradiction qui la réfuterait, ne laisse pas d'être incorrecte ») et qui, en son temps, troubla jusqu'à son auteur Kolmogorov, est inhérent à la démarche intuitioniste : si l'on autorise des définitions imprédicatives (c'est-à-dire des définitions où un objet est défini au moyen d'une quantification qui opère sur une collection contenant cet objet), afin que la loi la double négation cesse d'être valide, l'« intuitionisme imprédicatif » qui en résulte est contradictoire.

théories obtenues, bien que voisines de ZF (Goodman-Myhill, 1992), nécessitent la reformulation de certains axiomes (dont l'axiome de fondation et l'axiome du choix) et rendent non valides, parmi d'autres, les théorèmes classiques suivants :

(i) Un ensemble non vide contient au moins un élément.

(ii) Tout ensemble X de type fini est fini.

L'énoncé (i), connu sous le nom d'axiome du choix simple, est, en fait, équivalent au tiers exclu. La simple mention de ces résultats et, *a contrario*, de certains théorèmes intuitionistes (toute fonction de **R** dans **R** est continue) jettent pour le moins un sérieux doute sur la pertinence et l'intérêt des mathématiques intuitionistes (que pratiquement aucun logicien intuitioniste n'oserait d'ailleurs réellement défendre).

Par ailleurs, s'il est vrai que l'intuitionisme a toujours eu pour ambition de résorber « l'antinomie du continu et du point » (Largeault, 1992), antinomie qui conduit au rejet du continu cantorien, le fait que les sémantiques de la logique intuitioniste soient (à un monomorphisme près) exprimables dans un espace topologique rend un tel objectif inatteignable : la topologie est tributaire, philosophiquement et techniquement, de la définition ensembliste du continu.

L'examen du substrat catégorique de la logique intuitioniste apporte à ces diverses critiques un éclairage qui en accuse les traits.

Un axiome fondamental de la théorie des topoï est celui qui affirme l'existence d'un classificateur, c'est-à-dire d'un objet particulier Ω et d'une flèche $\top : 1 \to \Omega$ qui, pour tout objet X d'un topos, établit une bijection entre l'ensemble Sub(X) des sous-objets $f : A \to X$ et l'ensemble des flèches (dites caractéristiques) $\chi_f : X \to \Omega$. Cet axiome, qui fonctionne comme un axiome de séparation (du moins pour les formules dont tous les quantificateurs sont bornés), fait qu'un topos se comporte – modulo l'abandon du tiers exclu – « comme » la catégorie **Set** des ensembles, laquelle est un topos booléen ($\Omega = \{0, 1\}$, Sub(Ω) est une algèbre de Boole). Cette lecture ensembliste de la définition d'un topos est légitimée par son « langage interne » de Mitchell-Bénabou. Deux approches sont alors possibles pour rendre compte des propriétés d'un topos : du point de vue externe, la théorie des topoï, comme toute théorie mathématique, est appréhendée aux moyens de la logique classique et de la théorie des ensembles ; selon le point de vue interne, seuls les énoncés du langage interne sont porteurs de sens, même s'ils sont généralement reformulés en termes mathématiques classiques via notamment la sémantique de Kripke-Joyal. De nombreux concepts sont ainsi susceptibles d'une double appréhension, interne et externe, entretenant l'une l'autre des rapports subtils et, parfois, conflictuels (Ageron, 2002).

Du point de vue interne, la sémantique (toposique) de l'implication, en tant que flèche de vérité $\Omega \times \Omega \to \Omega$, est conforme au schéma de la preuve de l'implication dans l'interprétation BHK : une preuve de $p \to q$ est une transformation d'une preuve de p en une preuve de q. Il en va autrement si l'on considère le point de vue externe. Tout d'abord, c'est le fait que la collection Sub(X) des sous-objets d'un objet X dans un topos quelconque puisse être munie d'une structure d'algèbre de Heyting qui permet d'établir que tout topos possède une logique interne qui est, en général, intuitioniste : la prouvabilité intuitioniste est équivalente à la validité dans un topos quelconque[10]. Par ailleurs, toute catégorie cartésienne fermée, donc tout topos, satisfait la propriété d'exponentiation : pour tout triplet (A, B, C) d'objets dans un topos quelconque il existe un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(C, B^A) \cong \mathrm{Hom}(A \times C, B)$$

entre l'ensemble des flèches (ou morphismes) $C \to B^A$, où B^A est l'objet exponentiel, et l'ensemble des flèches $A \times C \to B$. Cet isomorphisme est la traduction catégorique de l'équivalence

$$r \vdash p \to q \text{ ssi } p \wedge r \vdash q$$

qui n'est autre que la définition du connecteur d'implication intuitioniste (et d'ailleurs de l'implication classique) et dont la contrepartie sémantique, dans une algèbre de Heyting H et dans un espace topologique (X, Θ), s'écrit respectivement

$$c \leq a \Rightarrow b \text{ ssi } a \wedge c \leq b, \text{ pour tout } a, b, c \in H,$$

où $\Rightarrow$ est la pseudo-complémentation relative dans H, et

$$C \subseteq A \Rightarrow B \text{ ssi } A \cap C \subseteq B, \text{ pour tout } A, B, C \in \Theta,$$

la validité de cette dernière équivalence tenant aux propriétés des opérateurs fondamentaux de la topologie, notamment à l'idempotence de l'opérateur d'intérieur.

Le clivage entre point de vue interne et point de vue externe dans un topos renvoie donc à deux interprétations concurrentes de la sémantique de l'implication intuitioniste : l'interprétation BHK (en vertu de laquelle l'implication intuitionniste serait en rupture par rapport à l'implication classique), l'interprétation imposée par les propriétés du connecteur d'implication (lequel obéit au même schéma que son homologue classique). C'est évidemment à cette dernière que la logique intuitioniste souscrit.

Il en va de même pour les autres flèches de vérité (point de vue interne) c'est-à-dire pour les autres connecteurs (point de vue externe). Ceux-ci se divisent en deux ensembles : celui $\{\bot, \vee, \exists\}$ des connecteurs additifs définis comme des adjoints à gauche, celui $\{\top, \wedge, \forall\}$ des connecteurs multiplicatifs définis comme des adjoints à droite, ces deux ensembles étant pris dans une relation de dualité – l'implication, qui est multiplicative, n'ayant pas de dual

[10] Ce résultat, qui fonde catégoriquement la logique intuitioniste, est beaucoup plus complexe que sa formulation le laisse paraître. Il admet comme cas particulier le théorème suivant : toute formule valide dans un topos booléen (un topos dans le quel Sub(X) est, pour tout objet X, une algèbre de Boole) est classiquement valide (et est donc un théorème de la logique classique). Mais la réciproque est fausse : il existe des topoï non booléens qui valident la logique classique. Ce résultat important (sur lequel nous reviendrons en Section 4) fait écho à l'impossibilité pour le tiers exclu d'assumer le rôle, que les intuitionistes entendent lui faire jouer, de rempart anti-constructif.

additif. Ainsi, d'un point de vue interne, puisqu'une preuve d'une conjonction $p \wedge q$ équivaut à une preuve de p, une preuve de q et à la possibilité de reconstruire à partir d'une preuve de $p \wedge q$ une preuve de p et une preuve de q, la dualité entre conjonction et disjonction conduit à l'interprétation BHK de la preuve de la disjonction : une preuve de $p \vee q$ équivaut à celle d'une preuve de p ou d'une preuve de q et à la possibilité de savoir de laquelle il s'agit – schéma qui légitime, sur le plan catégorique, l'exigence de commutation entre prouvabilité et disjonction. En d'autres termes, la conjonction, d'un point de vue interne, est un produit et la disjonction un co-produit, version catégorique de la réunion disjointe. Mais, d'un point de vue externe, le connecteur intuitioniste de disjonction est, à l'instar de son homologue classique, une disjonction dans une algèbre de Heyting, c'est-à-dire, à un monomorphisme près, une réunion simple d'ouverts dans un espace topologique. D'ailleurs, la propriété de disjonction logique

$$\Gamma \vdash p \vee q \quad \text{ssi} \quad \Gamma \vdash p \text{ ou } \Gamma \vdash q,$$

non seulement ne vaut que dans certains cas (calcul propositionnel, calcul des prédicats sans symboles de fonctions) mais, de plus, est une conséquence masquée des propriétes de la négation (si pour tout valuation v, $v(p \vee q) = 1$ alors $v(q) > \neg v(p)$), non pas de la disjonction. Le clivage entre point de vue interne et point de vue externe dans un topos met, à nouveau, en évidence un conflit entre deux interprétations de la sémantique intuitioniste, en l'occurence de la disjonction – conflit qui remise, une nouvelle fois, l'interprétation BHK au rang de curiosité historique.

Ainsi la philosophie intuitioniste de la preuve (exprimée par l'interprétation BHK, prise en charge formellement par le point de vue toposique interne), qui entend remettre en cause la disjonction et l'implication classiques, se traduit-elle, en logique intuitioniste, par le seul affaiblissement (au demeurant problématique) de la négation.

Enfin, la correspondance de Curry-Howard et le λ-calcul, vu comme le langage interne d'un topos, établissent un lien fondamental entre théorie des topoï, topologie, logique intuitioniste et sémantiques des langages formels (en particulier des langages de programmation). Est-il nécessaire d'insister sur le fait, révélé, cette fois, par l'analyse de son substrat catégorique, que la logique intuitioniste est liée, de manière irréfragable, à la topologie et se trouve ainsi dans l'impossibilité (nous y reviendrons en Section 4) de s'affranchir de ses attaches ensemblistes, en particulier de la conception du continu portée par la théorie des ensembles et que l'intuitionisme, dans sa quête d'une nouvelle approche du continu, constitue une impasse ?

3.3 Le constructivisme non-standard

Le calcul infinitésimal plonge ses racines dans le dix-septième siècle européen, avec les travaux d'Euler, Leibniz, Newton, de l'Hospital, etc. C'est la notion d'infiniment petit qui permit d'imaginer les notions de limite et de dérivée, lesquelles sont à la base de l'analyse. Mais, faute de bénéficier d'une définition rigoureuse, l'idée originelle d'infiniment petit fut longtemps rejetée par les mathématiciens (bien que l'analyse classique ait toujours eu recours, de manière plus ou moins explicite, aux infiniment petits et aux infiniment grands).

Quoi qu'il en soit, ces travaux pionniers sur le calcul infinitésimal ne sauraient être considérés comme la préhistoire, ou même la protohistoire, du calcul infinitésimal de l'analyse non-standard : les fondements logiques et son apport aux questions du continu et de l'infini placent celle-ci en rupture par rapport à tout ce qui l'a précédée. Parmi les travaux qui ont préparé le terrain à l'émergence du calcul infinitésimal non-standard, il convient de citer ceux de Veronese (1891) où l'on trouve la structure d'ordre de l'ensemble des entiers non-standard et l'ébauche d'une géométrie différentielle non-standard et de Levi-Civita, élève de Veronese. Dans la période post-cantorienne, qui, pour des raisons évidentes, fut celle de la mise au banc de l'option infinitésimale, les travaux de Wiener et ceux de Laugwitz (1958) peuvent être vus comme de véritables précurseurs de ceux de Robinson.

La « révolution » opérée par Robinson consiste, sur le plan épistémologique, en un changement de point de vue concernant les notions d'infiniment petit et d'infiniment grand, abordées désormais sous l'angle de la théorie des modèles. Sur le plan mathématique, les armes de la révolution sont, d'un côté, le théorème de Löwenheim-Skolem qui établit l'existence de modèles non standard de l'arithmétique et, d'un autre, les puissantes techniques de construction de modèles non standard offertes par les concepts d'ultraproduit et d'ultrapuissance.

L'analyse non-standard (ans) de Robinson (1966) repose, en effet, sur les éléments fondamentaux suivants. Les éléments du corps $\mathbf{R}$ des réels (ou de tout autre structure plus complexe : ensemble $\wp(\mathbf{R})$, fonctions de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, etc.) sont tous standard. On construit alors un sur-corps ${}^*\mathbf{R}$ de $\mathbf{R}$ de la façon suivante. Soit $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble de suites de nombres réels dont un élément est noté $\langle r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \rangle$ ou $\langle r_n : r_n \in \mathbf{R} \rangle$ ou simplement $\langle r_n \rangle$. La donnée d'un ultrafiltre non principal $\mathfrak{I}$ sur $\mathbf{N}$ permet de définir la relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ en posant

$$\langle r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \rangle \equiv \langle s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \rangle \text{ ssi } \{n : r_n = s_n\} \in \mathfrak{I},$$

c'est-à-dire ssi les deux suites coïncident presque partout modulo $\mathfrak{I}$. La classe d'équivalence d'une suite $r = \langle r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \rangle$ modulo $\equiv$ est notée $[\,r\,]$ et l'ensemble quotient de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ par $\equiv$ est l'ensemble

$${}^*\mathbf{R} = \{\, [r] : r \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \,\} = \{\, [\langle r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \rangle] : r_n \in \mathbf{R} \,\}.$$

Les éléments de ${}^*\mathbf{R}$ sont appelés hyperréels, ceux de ${}^*\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}$ sont dits non-standard.

L'ensemble ${}^*\mathbf{R}$ peut être muni des opérations

$$[\,r\,] + [\,s\,] = [\langle r_n + s_n \rangle],$$
$$[\,r\,] \,.\, [\,s\,] = [\langle r_n \,.\, s_n \rangle],$$
$$[\,r\,]^{-1} = [\langle r_n^{-1} \rangle],$$

où $r_n^{-1} = 1/r_n$ pour tout n tel que $r_n \neq 0$ et $r_n^{-1} = 0$ sinon, qui confèrent à $^*\mathbf{R}$ une structure de corps (non archimédien). De plus $^*\mathbf{R}$ est muni d'un ordre

$$[\,r\,] \leq [\,s\,] \text{ ssi } \{n : r_n \leq s_n\} \in \mathfrak{I}.$$

Soit alors $^*r \in {}^*\mathbf{R}$ l'hyperréel défini par $^*r = [\langle r, r, \ldots, r, \ldots \rangle]$ avec $^*0 = [\langle 0, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle]$. L'application $r \mapsto {}^*r$ étant un monomorphisme de $\mathbf{R}$ dans $^*\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ est, à un monomorphisme près, un sous-corps de $^*\mathbf{R}$.

Considérons maintenant

$$\varepsilon = \langle\, 1/n : n \in \mathbf{N} \,\rangle.$$

Alors, $^*0 \leq [\varepsilon]$ et, pour tout $r \in \mathbf{R}$, $[\varepsilon] \leq {}^*r$. L'hyperréel $[\varepsilon]$ est donc positif et inférieur à tout réel positif. On dit que $[\varepsilon]$ est une *infinitésimale* (*positive*). Son inverse $[\omega] = [\varepsilon]^{-1}$ est dit *infiniment grand* ou *illimité*. Plus généralement, x et y étant des hyperréels,

(i) si $^*0 \leq x \leq {}^*r$, pour tout $r \in \mathbf{R}^+$, x est une *infinitésimale positive*.

(ii) si $^*r \leq x \leq {}^*0$, pour tout $r \in \mathbf{R}^-$, x est une *infinitésimale négative*.

(iii) si $^*r \leq x$, pour tout $r \in \mathbf{R}$, x est un *illimité positif*.

(iv) si $x \leq {}^*r$, pour tout $r \in \mathbf{R}$, x est un *illimité négatif*.

(v) x et y sont *infiniment voisins* ($x \approx y$) si x-y est un infinitésimal.

(vi) x est *limité* s'il n'est pas illimité.

(vii) x est *appréciable* s'il n'est ni infinitésimal ni illimité.

L'arithmétique de $^*\mathbf{R}$ découle de ces définitions. Soit, en effet, $[\varepsilon]$ et $[\delta]$ deux infinitésimales, $[a]$ et $[b]$ deux hyperréels appréciables et $[A]$ et $[B]$ deux illimités. Alors

$[\varepsilon] + [\delta]$ est infinitésimal

$[a] + [\varepsilon]$ est appréciable

$[a] + [b]$ est limité (éventuellement infinitésimal)

$[A] + [\varepsilon]$ et $[A] + [a]$ sont illimités

$[\varepsilon]\,.\,[\delta]$ est infinitésimal

$[a]\,.\,[\varepsilon]$ est infinitésimal

$[a]\,.\,[b]$ est appréciable

$[A]\,.\,[a]$ et $[A]\,.\,[B]$ sont illimités

$[\varepsilon]^{-1}$ est illimité si $[\varepsilon] \neq {}^*0$

$[a]^{-1}$ est appréciable

$[A]^{-1}$ est infinitésimal.

Si l'ans, dans sa version robinsonienne, a suscité et suscite de fortes réticences, c'est avant tout en raison du rôle central qui y est joué par le concept d'ultraproduit, lequel peut être vu comme le véritable contenu mathématique de l'ans à la Robinson. Quoi que l'on pense de cet argument, c'est la réception pour le moins peu enthousiaste que les mathématiciens ont accordée aux travaux de Robinson qui a conduit des non standardistes à proposer une version syntaxique de la théorie qui s'éloigne autant que possible des racines logiques de l'ans. L'approche de Nelson (1977) consiste à considérer que, dans **R** lui-même (et plus généralement dans les ensembles infinis), certains éléments peuvent avoir une propriété – celle d'être standard –, propriété non définissable en termes classiques ; d'autres, au contraire, peuvent être non standard, le prédicat « être standard », noté *st*, obéissant à un système d'axiomes que l'on ajoute à ceux de la théorie des ensembles. L'introduction du prédicat *st* conduit à deux types de formules : celles qui s'écrivent sans *st* sont appelées internes ; les autres, qui contiennent *st*, sont dites externes. De plus, les formules internes dont tous les paramètres désignent des objets standard sont appelés formules standard.

Plus précisément, les règles qui régissent la propriété « être standard » se traduisent formellement par

(i) l'introduction dans le langage de la théorie des ensembles d'un prédicat *st* : $st(x)$ est une notation pour « x est standard »,

(ii) l'ajout à ZFC de trois schémas d'axiomes :

– le transfert (T) : $\forall^{st} x\, \phi(x) \rightarrow \forall x\, \phi(x)$, où $\forall^{st} x\, \phi(x)$ signifie $\forall x\, (st(x) \rightarrow \phi(x))$,

– l'idéalisation (I) : $\exists y\, \forall^{st} x\, A(x, y)$ ssi A est une relation interne concourante, c'est-à-dire telle que, pour tout ensemble standard fini Z, il existe y tel que $(\forall x \in Z)\, A(x, y)$,

– la standardisation (S) : pour toute formule ϕ, interne ou externe, et tout ensemble standard X, il existe une partie standard Y de X telle que $(\forall^{st} x \in X)$ $(x \in Y \leftrightarrow \phi(x))$; autrement dit, pour toute partie, interne ou externe A de X, il existe une partie B de X qui a les mêmes éléments standard que A. L'ensemble B est appelé le standardisé de A : $B = {}^*A$.

Les objets standard, internes ou externes, ainsi construits par l'approche nelsonienne, possèdent des propriétés semblables à celles qui découlent de leur définition dans l'approche robinsonienne.

La théorie ainsi obtenue (ZFC+I+S+T) est appelée IST (*internal set theory*). Le langage de ZFC, par opposition au langage non standard, celui d'IST, est appelé langage standard. Les rapports entre ZFC et IST sont régis par les deux résultats suivants :

(i) Tout énoncé standard a une traduction classique : si $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un énoncé d'IST, on peut obtenir un énoncé standard $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ équivalent à $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dès lors que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont standard.

(ii) Tout théorème classique d'IST est dérivable de ZFC.

Le principal intérêt épistémologique de l'ans est d'offrir une bonne compréhension de la façon dont les règles qui valent pour le fini « passent » à l'infini et d'apporter un éclairage nouveau aux généralisations de théories élémentaires du cas fini au cas infini. Dans la version robinsonienne, la stratégie consiste, via le transfert, à passer du fini à l'hyperfini et de prendre les parties standard. Dans la version nelsonienne, la stratégie est internalisée : à l'opposition fini-hyperfini se substitue l'opposition fini naïf – fini idéal.

Faut-il voir dans ce constructivisme non standard une résurgence de la vision intuitioniste des mathématiques ? Si l'ans est indiscutablement une approche constructiviste qui peut être vue, selon les termes de Cartier (1986), comme une approche de l'analyse à partir de modèles hyperfinis qui fournissent d'excellentes approximations, il semble difficile de voir dans la filiation entre intuitionisme et ans plus qu'une convergence de vue dans leur rejet commun du formalisme, en ceci notamment qu'à la différence de ce dernier ils entendent, l'un et l'autre, aborder la question du sens. (Pour un point de vue selon lequel la convergence entre intuitionisme et ans va au-delà de ce rejet commun, voir Salanskis (1999)). Quoi qu'il en soit de cette filiation entre intuitionisme et non standardisme, force est de constater que si l'ans permet une réécriture, plus élégante, de l'analyse classique au moyen de concepts nouveaux, elle fournit peu de théorèmes nouveaux et intéressants.

De plus, la construction de l'ensemble ${}^*\mathbf{R}$ des hyperréels comme quotient de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dépend du choix d'un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{N}$. Mais l'ensemble des ultrafiltres non principaux sur $\mathbf{N}$ est équipotent à l'ensemble $\wp(\wp(\mathbf{N}))$ des parties de $\wp(\mathbf{N})$. La construction des hyperréels n'aboutit donc à un objet ${}^*\mathbf{R}$ unique que dans la mesure où $\wp(\mathbf{N})$ et $\mathbf{R}$ sont équipotents c'est-à-dire ssi on intègre l'hypothèse du continu comme axiome.

Comme déjà mentionné, tout théorème classique, dérivable à partir d'IST, est dérivable à partir de ZFC, c'est-à-dire IST est une extension conservatrice de ZFC. On en déduit que si ZFC est cohérent, il en est de même d'IST. Mais ce résultat signifie, avant tout, que tout théorème n'utilisant pas les infinitésimales, démontré dans le cadre de l'ans, peut aussi l'être (sans utiliser les infinitésimales) dans le formalisme ensembliste classique. Comment ne pas voir dans ce résultat la justification, *a posteriori*, du choix de la plupart des mathématiciens de se passer d'une définition explicite des infiniment petits ?

Enfin on peut démonter (De Glas, 2010), qu'à tout réel non standard peut être canoniquement associé un sous-ensemble *non Lebesgue-mesurable* de l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$. Soit, en effet, pour ${}^*r \in {}^*\mathbf{R}$, $\lim_{\mathfrak{I}} {}^*r$ la limite de ${}^*r$ suivant $\mathfrak{I}$, c'est-à-dire l'élément unique r de $\mathfrak{R} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que, pour tout voisinage V de r, il existe $U \in \mathfrak{I}$ tel que $\{r_n : n \in U\} \subseteq V$. Deux hyperréels ${}^*r_1$ and ${}^*r_2$ ont la même limite r ssi ${}^*r_1 - {}^*r_2$ est une infinitésimale. Pour tout ${}^*r$ tel que $\lim_{\mathfrak{I}} {}^*r$ n'est pas finie, r est $-\infty$ ou $+\infty$. Puisque la relation ${}^*r_1 \sim {}^*r_2$ ssi ${}^*r_1$ et ${}^*r_2$ ont la même limite suivant $\mathfrak{I}$ est une équivalence sur ${}^*\mathbf{R}$, à tout ${}^*r \in {}^*\mathbf{R}$ peut être canoniquement associé un élément de $\mathfrak{R}$, donc un élément x_r de $[0, 1]$. Le développement dyadique de tout $x \in [0, x_r]$ s'écrit

$$x = 1/2^{n_1} + 1/2^{n_2} + \ldots, n_i \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \text{pour tout } i \in \mathbf{N}.$$

Soit alors l'ensemble $A_r = \{x \in [0, x_r] : \{n_1, n_2, \ldots\} \in \mathfrak{I}\}$. Sachant qu'à tout ultrafiltre non principal $\mathfrak{I}$ on peut associer, de façon biunivoque, une mesure additive mais non σ-additive μ sur $\mathbf{N}$, définie par $\mu : \wp(\mathbf{N}) \to \{0, 1\}$, $\mu(A) = 1$ ssi $A \in \mathfrak{I}$, et réciproquement à toute mesure μ un ultrafiltre non principal $\mathfrak{I} = \{A \subseteq \mathbf{N} : \mu(A) = 1\}$, A_r peut s'écrire

$$A_r = \{x \in [0, x_r] : \mu(\{n_1, n_2, \ldots\}) = 1\}.$$

Alors $A_r \cup B_r = [0, x_r]$ avec $B_r = \{x \in [0, x_r] : \mu(\{n_1, n_2, \dots\}) = 0\}$. Puisque, comme l'a montré Serpinski (1937), la fonction $x \mapsto \mu(\{n_1, n_2, \dots\})$ n'est pas Lebesgue-mesurable, il en est de même de A_r et B_r. À tout hyperréel se trouve donc canoniquement associé un sous ensemble non Lebesgue-mesurable de la droite réelle. Puisqu'il est impossible d'exhiber et de nommer un tel sous-ensemble, un réel non standard échappe à toute construction possible et est, en quelque sorte, innommable, aussi fictif qu'un sous-ensemble non mesurable de **R**.

L'ans est donc non seulement « superflue » en tant qu'extension conservatrice de l'analyse classique ; elle est, de plus, pathologique en ce qu'elle donne droit de cité à des entités fictives.

4. Locologie et logique localiste

4.1 Retour sur la topologie

Il est pour le moins surprenant – le silence des historiens et philosophes des mathématiques, sur ce point, l'est tout autant – que les critiques, dont certaines féroces, adressées à la théorie des ensembles et à sa conception du continu et de l'infini (même si ces critiques ne sont pas parvenues à entamer sa position dominante) aient totalement épargné la topologie alors que celle-ci incorpore en son sein de nombreuses notions problématiques de la théorie des ensembles, à commencer, bien sûr, par sa conception du continu.

Le point de vue de Thom, déjà évoqué, qui rejette la théorie des ensembles mais fait de la topologie le point cardinal de sa pensée de philosophe et de sa pratique de mathématicien, est symptomatique de cette « schizophrénie » des mathématiciens face à la question du continu.

L'identification du continu géométrique à un ensemble infini de points d'un segment de droite (ultérieurement définis comme coupures dans la suite des rationnels) signe, outre l'insertion de l'infini actuel au sein des mathématiques, la « déspatialisation » de l'espace (Granger, 1999). C'est pourtant sur ce « mythe fondateur » de la théorie des ensembles, que s'est fondée la tentative de « respatialisation » de l'espace opérée par la topologie. Si celle-ci est parvenue à s'affranchir partiellement de ses origines ensemblistes, elle n'en reste pas moins tributaire des paradoxes de l'infini actuel et du continu et la définition de nombre de ses concepts procède d'un abandon des propriétés intuitives de la notion phénoménale d'espace.

La topologie rompt donc avec la *Physique* aristotélicienne et sa tentative de construire une théorie du monde fondée sur le continu, sans avoir recours à la générativité du nombre, une théorie où le point n'existe qu'en puissance, où seul le segment accède à l'existence, l'être en acte.

Ainsi Thom a-t-il sans doute raison de voir dans cette « mathématique » du continu et de l'espace qu'est la *Physique* aristotélicienne une « révolte à l'égard de Platon, celle du topologiste contre l'impérialisme de l'arithméticien », révolte opérée au nom de la divisibilité du continu, elle-même ancrée sur la conception aristotélicienne de la matière, qui peut être soumise à une infinité de retranchements sans qu'elle ne s'annule. La *Physique* d'Aristote peut donc être légitimement considérée comme une « topologie », au sens étymologique du terme, c'est-à-dire une science du lieu et du mouvement. Mais il est impossible de suivre Thom et de donner à une telle assertion un sens autre que métaphorique.

En effet, le programme d'axiomatisation de la dynamique aristotélicienne dans les termes de la topologie (mathématique), que Thom entreprend dans son *Esquisse d'une sémiophysique* tombe sous le coup de sa propre critique de la conception cantorienne du continu et de l'infini et travestit la conception aristotélicienne. La lecture « catastrophiste » de la *Physique*, à laquelle Thom procède, conduit à un monde constitué d'entités qui, toutes, admettent un substrat ou support. Les entités premières ont un substrat matériel, donc spatial, dans $\mathbf{R}^4$; les entités secondes ont un substrat abstrait. Les entités individuées (c'est-à-dire à support connexe) sont des boules d'intérieur non vide. Les seules entités « réelles » sont, comme les êtres vivants, des boules fermées (d'intérieur non vide) de l'espace.

De plus, selon Thom, l'affirmation d'Aristote : « les extrémités d'un corps et de son enveloppe sont les mêmes » se traduirait, l'épaisseur de l'enveloppe étant négligeable, par l'idempotence de l'opérateur d'adhérence. Notons, tout d'abord, que cette propriété d'idempotence requiert que l'enveloppe soit d'épaisseur, non pas négligeable, mais nulle – hypothèse en contradiction avec celle de la divisibilité infinie du continu. Ensuite, l'idée que l'enveloppe, ou le bord, d'un animal est la sphère qui représente la forme et dont le complémentaire est une boule représentant la matière (« la forme est le bord de la matière ») conduit à une impasse. L'enveloppe d'un corps (par exemple la peau d'un animal) ne saurait être d'intérieur vide : celle-ci, en tant qu'entité « réelle », est un fermé d'intérieur non vide. Pourquoi, de plus, la matière serait-elle une boule ouverte ? Le désir de faire « entrer » la *Physique* aristotélicienne dans l'épure topologique contraint Thom à surinterpréter la première et à en « tordre » les principaux concepts. Ces torsions et contorsions affectent notamment le concept de frontière et mettent en évidence l'inadéquation du concept topologique à la modélisation de la notion intuitive. Le problème essentiel est que cette dernière a deux sens distincts : la zonalité et la linéarité. En rabattant la première sur la seconde, la topologie munit les entités considérées de propriétés contre-intuitives.

Le « rêve » de Thom d'une mathématisation du continu aristotélicien au sein de la topologie est à tout jamais impossible : l'arrimage de la topologie à la théorie des ensembles fait sombrer le « rêve » dans le « cauchemar » cantorien.

De nombreux autres éléments à charge peuvent être invoqués contre la topologie. À titre d'exemple, deux des quatre axiomes de définition du concept de voisinage, concept historiquement et épistémologiquement premier en topologie, sont problématiques : (i) celui qui affirme que tout sur-ensemble d'un voisinage d'un point est voisinage de ce point ; (ii) le quatrième axiome en vertu duquel, si V est un voisinage de x, il existe un voisinage W de x tel que, pour tout y de W, V est un voisinage de y. Ce quatrième axiome, qui introduit rien moins que la transitivité de la relation de voisinage, est la matrice de l'essentiel des problèmes évoqués ci-dessus : idempotence des opérateurs d'intérieur et d'adhérence, frontières de mesure de Lebesgue nulle (sauf à travailler dans des espaces non séparables) et ce qui en découle, l'impossible saisie intuitive du spatial.

Les diverses généralisations de la topologie ensembliste constituent un courant multiforme mais obéissent toutes à un même objectif : l'« élimination » des points – c'est du moins le slogan des approches qui s'en réclament. Relèvent de ce courant de recherche les espaces abstraits (étudiés par Hausdorff qui utilisa la notion d'ouvert comme primitive dans la définition de la continuité), les algèbres de Heyting, la topologie sans points (où le treillis des ouverts est une primitive, indépendamment du fait qu'un ouvert est constitué de points), la topologie formelle (une approche intuitioniste de la topologie, fondée sur la théorie des types de Martin-Löf).

Un pas supplémentaire, dans ce processus d'abstraction, est franchi grâce à la catégorie des locales (dont les objets sont les treillis complets infiniment distributifs et les morphismes les applications qui respectent le min et le sup), qui, selon de nombreux catégoriciens, est la structure au sein de laquelle la topologie sans points doit être développée, en raison du surcroît de constructivité qu'elle apporterait. Quoi que l'on pense de cette dernière assertion, de nombreux résultats montrent (Johnstone, 1983) que, d'un certain point de vue (en particulier dans les locales spatiales), la théorie des locales n'est qu'une version déguisée de la topologie ensembliste. De plus, une partie substantielle de la théorie des locales peut être internalisée dans un topos, lequel n'est, par construction, qu'une catégorie qui se comporte « comme » la catégorie des ensembles. La topologie formelle est liée à la topologie sans points par une adjonction (au sens catégorique du terme) entre la catégorie des locales et celle des espaces topologiques. Dans le cas des locales spatiales, l'adjonction se réduit à une équivalence entre la catégorie des locales spatiales et celles des espaces topologiques sobres. Topologie formelle et topologie sans points sont donc essentiellement équivalentes.

Relativement aux problèmes posés par la topologie ensembliste, ces diverses approches, en dépit des généralisations apportées par le processus d'« élimination » des points, n'ont rien d'essentiel à apporter.

La *locologie* (De Glas, 1990, 1992, 1997, 2009 ; De Glas & Plane, 2005 ; Breysse & De Glas 2007 ; Barthélemy *et al*, 1996) permet d'appréhender, d'une façon essentiellement nouvelle, les problèmes posés par la topologie et se pose, ainsi, comme solution de rechange à cette dernière. À partir de la donnée d'une relation qui, en première approche, peut être vue comme une relation de ressemblance, de proximité ou comme la mesure d'une granularité sur l'espace sous-jacent, les concepts fondamentaux abordés par la topologie sont redéfinis, à nouveaux frais. Les caractéristiques essentielles de cette nouvelle *analysis situs* sont les suivantes : les concepts de cœur et d'ombre, qui se substituent à ceux d'intérieur et de fermeture, sont non idempotents ; à chaque ensemble se trouvent associées une frontière linéaire et une frontière zonale (laquelle se divise en une partie interne et une partie externe) ; la structure algébrique sous-jacente est celle d'un treillis complet et complémenté, non distributif et semi-implicatif. La définition de la continuité dans un espace locologique confère à la catégorie des espaces locologiques une structure de catégorie cartésienne mais non cartésienne fermée. Les résultats essentiels de la locologie sont brossés à grands traits ci-dessous.

La logique localiste, qui « émerge » du substrat locologique, se situe en rupture, elle aussi, par rapport aux logiques existantes. Elle permet de montrer, entre autres, que le tiers exclu n'est en aucune façon un principe d'omniscience et que ce dernier et la *reductio ad adsurdum* sont indépendants l'un de l'autre. De plus la logique localiste rejette l'axiome dit du « paradoxe positif », $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, sur la base suivante : si p est dérivable d'un ensemble d'hypothèses, il n'y a aucune raison qu'il en soit de même de $q \rightarrow p$ (c'est-à-dire $\Gamma \vdash p$ n'entraîne pas $\Gamma \vdash q \rightarrow p$), sauf cas particuliers (dont $\Gamma = \varnothing$: un théorème peut être déduit de n'importe quoi). Il s'ensuit un affaiblissement du théorème de la déduction.

L'étude catégorique de la logique localiste et de la locologie conduit aux notions de prelocus et de locus. La théorie des (pre)loci fournit un fondement catégorique à la logique localiste, mais dans un sens différent de celui que la théorie des topoï offre à la logique intuitioniste : la logique localiste n'est pas une logique interne aux loci. Le prix à payer est une forme affaiblie de l'exponentiation qui permet de se « débarrasser » du concept, confortable mais problématique, de classificateur de sous-objets et d'échapper ainsi à la redoutable dialectique point de vue interne / point de vue externe véhiculée par la théorie des topoï. On démontre, néanmoins, l'équivalence entre prouvabilité localiste et validité dans un locus quelconque.

4.2 La locologie : une nouvelle *analysis situs*

4.2.1 Soit X un ensemble et λ une relation reflexive sur X : $x \lambda x$, pour tout $x \in X$. La relation λ peut être interprétée comme une relation de *ressemblance* (de *proximité*, voire d'*indiscernabilité*), au sens large de la notion de ressemblance, sens large qui renvoie au terme plus général d'« évocation » ou d'« accessibilité cognitive ». Cette relation λ correspond à un certain grain (plus ou moins fin) de perception des objets de l'univers. Pour tout x l'ensemble $\lambda[x] = \{y : x \lambda y\}$ des éléments de X proches de (ou ressemblant à, ou indiscernables de) x peut être vu comme le plus grand « voisinage » de x (au sens intuitif de la notion de voisinage). Puisque λ peut être définie comme une application $X \rightarrow \wp(X)$ qui à tout objet x associe $\lambda[x]$, on note $\lambda(A)$ l'ensemble

$$\lambda(A) = \bigcup_{x \in A} \lambda[x],$$

pour tout $A \subseteq X$. Ainsi $\lambda[x] = \lambda(\{x\})$.

On définit à partir de λ les opérateurs de cœur et d'ombre. Plus précisément, soit $h : \wp(X) \to \wp(X)$ l'opérateur qui, à tout $A \in \wp(X)$, associe son *cœur*

$$h(A) = \{x \in X : \lambda[x] \subseteq A\}.$$

Les éléments de $h(A)$ sont donc les objets qui ne ressemblent (par la relation λ) qu'à des éléments de A. Les propriétés remarquables de l'opérateur h sont les suivantes :

(i) $h(A) \subseteq A$, $h(X) = X$,

(ii) si $A \subseteq B$, alors $h(A) \subseteq h(B)$,

(iii) $h(A \cup B) \supseteq h(A) \cup h(B)$,

(iv) $h(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i h(A_i)$,

(v) $h \circ h(A) \subseteq h(A)$.

Les propriétés (i)-(iii) de l'opérateur h sont aussi celles d'un opérateur topologique d'intérieur. Mais, à la différence des propriétés dont ce dernier jouit, l'égalité (iv) vaut pour une intersection *infinie* de parties de X et, comme le montre l'inclusion (v), l'opérateur de cœur *n'est pas idempotent* (sauf si λ est transitive).

L'opérateur d'ombre est défini de manière duale. Soit $s : \wp(X) \to \wp(X)$ l'opérateur qui, à tout $A \in \wp(X)$, associe son *ombre*

$$s(A) = \{x \in X : \lambda[x] \cap A \neq \varnothing\}.$$

Les éléments de $s(A)$ sont les objets qui ressemblent à au moins un élément de A. Les opérateurs de cœur et d'ombre sont interdéfinissables puisque $s(A)^* = h(A^*)$. Il s'ensuit que

(i) $A \subseteq s(A)$, $s(X) = X$,

(ii) si $A \subseteq B$, alors $s(A) \subseteq s(B)$,

(iii) $s(A \cap B) \subseteq s(A) \cap s(B)$,

(iv) $s(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i s(A_i)$,

(v) $s \circ s(A) \supseteq s(A)$.

Si les propriétés (i)-(iii) de s sont analogues à celles d'un opérateur de fermeture en topologie, les propriétés (iv) et (v) traduisent la rupture par rapport à celui-ci : l'égalité (iv) vaut pour une union *infinie* de parties de X ; l'opérateur d'ombre *n'est pas idempotent*.

L'idée du recours à une structure relationnelle pour formaliser la notion intuitive d'indiscernabilité fait écho aux travaux de Poincaré (1902) sur le continu « physique ». Soit, en effet, trois grandeurs A, B et C telles que $A = B$, $B = C$ et $A < C$, où $A = B$ doit être compris comme « A et B sont indiscernables ». Cette relation, réflexive et symétrique, mais non transitive, est la traduction, selon Poincaré, d'un continu « physique » dont le continu (mathématique) n'est pas à même de rendre compte. C'est probablement cette critique du continu cantorien et le rejet conjoint de l'infini en acte, modulés par un refus d'adhérer au point de vue brouwérien sur l'indépendance de l'intuition par rapport à l'expérience et au langage, qui valut à Poincaré l'épithète de semi-intuitioniste. Toujours est-il que, chez ce dernier, le mathématicien ignora le philosophe des mathématiques et qu'il fallut attendre Zeeman (1961) pour que l'idée de Poincaré trouve une traduction formelle sous le nom de relation de tolérance. Toutefois, les travaux sur les espaces de tolérance n'eurent, eux-mêmes, qu'une postérité limitée à l'environnement immédiat, dans le temps et l'espace, de leur création. Il est toujours difficile d'expliquer le tarissement quasi complet et abrupt d'un courant de recherches. En l'espèce, il semble que cela soit imputable au contenu exclusivement géométrique de l'approche à la Poincaré-Zeeman : privés de dimension algébrique (et logique), les espaces de tolérance n'ont rien à offrir qui soit susceptible de jouer le rôle du treillis des ouverts (ou des fermés) d'un espace topologique.

L'idée de définir un opérateur d'intériorité non idempotent renoue avec les recherches de Choquet (1947) sur la prétopologie (à ceci près, toutefois, que la non idempotence des opérateurs de cœur et d'ombre découle de propriétés en amont de leur définition). Mais, hormis quelques travaux, plus ou moins fidèles à l'esprit de celles-ci (les espaces de fermeture généralisés de Cech (1966)[11] et quelques tentatives infructueuses d'étoffer ces derniers) et quelques applications au traitement de l'image, le courant amorcé par Choquet ne connut guère de suite, y compris de la part de Choquet lui-même. À rebours de l'argument visant à expliquer le tarissement des travaux sur la tolérance, il semble que la stérilité de l'approche de Choquet soit liée à l'absence de contenu géométrique. À cela s'ajoute la pauvreté des structures algébriques impliquées. À titre d'exemple, si Cl désigne l'opérateur de fermeture généralisé sur un espace X, l'algèbre $\mathcal{F} = \{Cl(A) : A \subseteq X\}$ n'est pas stable par intersection et, Cl admettant comme cas particulier l'opérateur de fermeture de Kuratowski, $\mathcal{F}$ n'est pas sup-complète, si bien qu'il est impossible de définir dans $\mathcal{F}$ la conjonction de deux objets : si A et B sont deux objets de $\mathcal{F}$, rien ne peut être dit de « A et B », si ce n'est que $A \cap B$ n'est pas un objet de $\mathcal{F}$. Une analyse duale vaut pour l'algèbre $\mathcal{O} = \{Int(A) : A \subseteq X\}$, où Int désigne l'opérateur d'intérieur généralisé correspondant : si A et B sont deux objets de $\mathcal{O}$, aucune formalisation de « A ou B » n'est possible. Ces limitations sont rédhibitoires[12].

Bien que la relation λ ne soit que réflexive, les algèbres que les deux opérateurs h et s, grâce notamment à leur propriété (iv), permettent de construire jouissent de propriétés et conduisent à des résultats qui n'ont aucun équivalent dans les espaces de tolérance à la Poincaré-Zeeman ou dans les espaces de fermeture généralisés à la Choquet-Cech.

---

[11] Une prétopologie sur un ensemble X est une famille de sous-ensembles de X qui contient $\varnothing$ et X et qui est stable par intersection. Un espace de fermeture généralisé s'obtient par dualisation.

[12] On ajoutera que l'infertilité de ces approches, en dépit de l'importance cruciale des objectifs visés, n'est probablement pas sans lien avec l'impossibilité, pour les topologistes qui en furent les pionniers, d'opérer une véritable rupture avec la topologie.

Considérons, en effet, l'algèbre

$$\mathcal{L} = \{h(A) : A \subseteq X\}.$$

Au vu des propriétés de h, il est évident que $(\mathcal{L}, \cap)$ est inf-demi-treillis complet. Cependant, pour A et B dans $\mathcal{L}$, $A \cup B$ peut ne pas être un élément de $\mathcal{L}$, de telle sorte que $(\mathcal{L}, \cup)$ n'est pas un sup-demi-treillis. Mais on peut définir, pour $A, B \in \mathcal{L}$,

$$A \sqcup B = \bigcap\{C \in \mathcal{L} : C \supseteq A, C \supseteq B\},$$

c'est-à-dire le plus petit majorant de l'ensemble des objets de $\mathcal{L}$ qui contiennent $A \cup B$, élément dont l'existence est garantie par l'inf-complétion de $\mathcal{L}$. Donc $(\mathcal{L}, \cap, \sqcup)$ est un treillis complet qui, toutefois, *n'est pas distributif* : on peut, en effet, trouver A, B et C dans $\mathcal{L}$ tels que $A \cap B = A \cap C$, $A \sqcup B = A \sqcup C$ et $B \neq C$. La non distributivité de $\mathcal{L}$ résulte de la non idempotence de h.

Par ailleurs, pour tout $A \subseteq X$,

$$h \circ \lambda(A) = \bigcap\{B \in \mathcal{L} : B \supseteq A\}.$$

Ainsi

$$\lambda \circ h(A) \subseteq A \subseteq h \circ \lambda(A),$$

pour tout $A \subseteq X$, avec $A = h \circ \lambda(A)$ ssi $A \in \mathcal{L}$, et

$$A \sqcup B = h \circ \lambda(A \cup B),$$

pour tout $A, B \in \mathcal{L}$.

En dépit des propriétés remarquables (non distributivité, complétion de $\mathcal{L}$, non idempotence de h), qui opèrent une rupture par rapport à la topologie (une topologie, en tant qu'algèbre, est un treillis distributif, sup-complet mais non inf-complet, l'opérateur d'intérieur est idempotent), il est clair, au vu des propriétés de h, que les objets de $\mathcal{L}$ présentent une certaine similarité avec les ouverts d'un espace topologique. Cependant $\mathcal{L}$ peut être redéfinie par

$$\mathcal{L} = \{A \subseteq X : A = h \circ \lambda(A)\}.$$

L'opérateur $h \circ \lambda$ est accrétif, non-décroissant et idempotent. C'est donc un opérateur algébrique de fermeture (c'est-à-dire une fermeture dans $\mathcal{L}$ en tant qu'ensemble ordonné). Evidemment, $h \circ \lambda$ n'est pas un opérateur topologique de fermeture puisque, par exemple, $h \circ \lambda(A \cup B) \neq h \circ \lambda(A) \cup h \circ \lambda(B)$. Mais cela signifie que les objets de $\mathcal{L}$ ont quelque chose en commun avec les *fermés* d'un espace topologique.

Une analyse duale peut être faite à partir de l'algèbre

$$\mathcal{K} = \{s(A) : A \subseteq X\}.$$

En effet, si, pour $A, B \in \mathcal{K}$, on définit

$$A \sqcap B = \bigcup\{C \in \mathcal{K} : C \subseteq A, C \subseteq B\},$$

alors $(\mathcal{K}, \sqcap, \cup)$ est un treillis complet mais non distributif, où, de plus,

$$[h \circ \lambda(A^*)]^* = \bigcup\{B \in \mathcal{K} : B \subseteq A\},$$

$$A \sqcap B = [h \circ \lambda((A \cap B)^*]^*,$$

et, dans le cas où λ est symétrique,

$$[h \circ \lambda(A^*)]^* = \lambda \circ h(A),$$
$$A \sqcap B = \lambda \circ h(A \cap B).$$

Le fait que $\mathcal{K}$ puisse être redéfinie par

$$\mathcal{K} = \{A \subseteq X : A = [h \circ \lambda(A^*)]^*\} = \{A \subseteq X : A^* = h \circ \lambda(A^*)\}$$

et, dans le cas où λ est symétrique, par

$$\mathcal{K} = \{A \subseteq X : A = \lambda \circ h(A)\}$$

montre, de façon duale, que les objets de $\mathcal{K}$ ont, au vu des propriétés de s, une similarité superficielle avec les fermés d'un espace topologique et, au vu des propriétés de $\mathcal{K}$, une similarité plus profonde avec les *ouverts* d'un espace topologique.

On dit que $\mathcal{L}$ est une *locologie* sur X et $\mathcal{K}$ une *co-locologie* sur X. Le couple $(X, \mathcal{L})$ est appelé *espace locologique*.

Cette homologie (partielle), à fronts renversés, entre topologie et locologie peut sembler, à première vue, paradoxale. Elle est, au contraire, un aspect clé de la locologie, lequel est mis en évidence par la définition *des* concepts de frontière dans un cadre locologique.

4.2.2 L'inadéquation du concept de frontière topologique à la modélisation de la notion nous invite à en revisiter l'étymologie. La notion et le mot, même en en restreignant le sens à la limite géographique entre deux pays, n'ont pas une longue histoire, l'un et l'autre supposant l'existence d'une souveraineté nationale. Le mot n'apparaît qu'à la fin du treizième siècle dans notre vocabulaire, au moment où l'Etat moderne surgit et se dote d'un territoire aux limites de plus en plus franches[13].

Mais l'étymologie cache, en fait, deux formes géographiques et deux sens distincts de la frontière : la linéarité et la zonalité. La frontière linéaire renvoie, en anglais, de manière encore plus marquée qu'en français, à l'expression *boundary*, entité abstraite qui correspond à la limite de souveraineté nationale, tracée au cordeau, et qui s'est dessinée avec l'instauration de l'Etat territorial moderne. La zonalité se traduit par le terme *frontier* (ou *border*), proche du mot français. La frontière zonale s'étend de part et d'autre de la frontière linéaire. C'est, d'une part, le front pionnier, l'expression d'une tendance à la

---

[13] On laissera aux médiévistes et aux historiens des religions le soin de décider s'il faut voir dans la naissance quasi simultanée du concept, géographique, de frontière et celui, théologique, de purgatoire plus qu'une simple concomitance. Notons simplement que l'installation du Purgatoire, en tant que substantif, dans la scolastique du treizième siècle, de sa première apparition en 1254 sous la plume d'Innocent IV jusqu'à sa formulation officielle, par l'Église latine, au Concile de Lyon en 1274, n'a pu se faire que grâce à une modification substantielle des cadres de l'imaginaire chrétien : la spatialisation de l'au-delà (Le Goff, 1991), trace manifeste de l'une des évolutions clés de l'histoire des idées et des mentalités : le processus de spatialisation de la pensée.

Par ailleurs, si c'est bien en tant que « troisième lieu » (Luther) qu'il s'est imposé, le Purgatoire, dans cette nouvelle géographie de l'au-delà ne sera, toutefois, jamais un parfait intermédiaire entre l'Enfer et le Paradis. Sans doute faut-il voir, dans la préservation de l'opposition binaire Enfer-Paradis (en clair, dans l'adhésion au tiers exclu), moins la marque d'une réticence face à une notion qui ne figurait pas dans les Écritures que le résultat de l'influence de la pensée aristotélicienne sur le Moyen-âge chrétien.

croissance de l'écoumène et l'expression dans l'espace de forces organisatrices : il s'agit de la frontière zonale interne. D'autre part, faisant suite à la notion de limite de civilisation, jalonnée de murs ou de Grandes Murailles pour les empires chinois ou romain (limes), la frontière zonale externe désigne la division entre la partie aménagée et la partie inhabitée d'un Etat (Ciattoni & Veyret, 2003, Berque, 2000).

Nous empruntons à la géographie sa terminologie : frontière zonale (interne et externe), frontière linéaire.

Dans un espace locologique $(X, \mathcal{L})$, on associe à tout $A \subseteq X$ sa *frontière zonale interne* et sa *frontière zonale externe* définies respectivement par

$$\partial_{int}(A) = \lambda(A^*) \cap A,$$
$$\partial_{ext}(A) = \lambda(A) \cap A^*,$$

la *frontière zonale* de A étant définie par

$$\partial(A) = \partial_{int}(A) \cup \partial_{ext}(A) = \lambda(A) \cap \lambda(A^*).$$

Une propriété fondamentale de ces deux opérateurs est leur idempotence qui découle de la propriété

$$h[\partial_{int}(A)] = h[\partial_{ext}(A)] = \varnothing,$$

dont la portée épistémologique est cruciale : ces égalités sont une manifestation de la différence que la locologie introduit entre ponctualité et indivisibilité – notions indûment confondues en topologie.

On associe, ensuite, à tout $A \subseteq X$ sa *frontière linéaire* $\beta(A)$, qui n'est autre que le cœur de sa frontière zonale :

$$\beta(A) = h[\partial(A)] = h \circ \lambda(A) \cap h \circ \lambda(A^*).$$

L'opérateur β satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\beta(A) = \beta(A^*) \in \mathcal{L}$,

(ii) $A \setminus \beta(A) = [h \circ \lambda(A^*)]^*$,

(iii) $A \cup \beta(A) = h \circ \lambda(A)$,

(iv) $A \in \mathcal{L}$ ssi $\beta(A) \subseteq A$,

(v) $A \in \mathcal{K}$ ssi $\beta(A) \cap A = \varnothing$.

Les propriétés (iv) et (v) des objets de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{K}$ (ceux de $\mathcal{L}$ contiennent leur frontière linéaire, ceux de $\mathcal{K}$ en sont disjoints) sont des propriétés essentielles qu'ils partagent, avec, respectivement, les fermés et les ouverts d'un espace topologique.

Cette analyse peut être affinée en considérant la notion de frontière linéaire sous un angle différent. Étant données deux relations réflexives λ et μ sur X, on dit que μ est plus *fine* que λ, $\mu \leq \lambda$, ssi

(i) $\mu \subseteq \lambda$,

(ii) il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mu^n \supseteq \lambda$.

Ainsi, pour λ donnée, on peut associer à tout $\mu \leq \lambda$, les opérateurs

$$h_\mu(A) = \{x \in X : \mu[x] \subseteq A\},$$
$$s_\mu(A) = \{x \in X : \mu[x] \cap A \neq \varnothing\}.$$

Il est alors facile de démontrer que les opérateurs κ et η définis par

$$\kappa(A) = \bigcap_{\mu \leq \lambda} \; s_\mu(A),$$

$$\eta(A) = \bigcup_{\mu \leq \lambda} \; h_\mu(A),$$

sont, respectivement, des opérateurs de fermeture et d'intérieur (topologiques). Cependant, $\beta(A)$, la frontière linéaire, et $\kappa(A)\backslash\eta(A)$, la frontière topologique, ne coïncident pas.

Ainsi, non seulement, la locologie introduit-elle des concepts purement locologiques (le cœur h, l'ombre s, les frontières zonales ∂_{int} et ∂_{ext}) qui n'ont pas de contrepartie en topologie, et des concepts que l'on peut qualifier de « quasi-topologiques » (les opérateurs $h \circ \lambda$ et $\lambda \circ h$, la frontière linéaire β), qui présentent certains traits communs mais également des différences essentielles avec leurs homologues topologiques, mais elle permet, en outre, de voir la topologie comme un cas limite correspondant à la donnée d'une granularité infiniment petite.

Par ailleurs, les concepts de frontière zonale et de frontière linéaire en locologie mettent en évidence les raisons de l'inadéquation du concept de frontière topologique à la modélisation de la notion intuitive de frontière, source, entre autres, des impasses dans lesquelles les méréotopologies se sont enfermées (voir Section 3.1). Les frontières topologiques étant (sauf à faire l'hypothèse, plus couteuse encore, de non séparation) de mesure de Lebesgue nulle, la question de savoir – question rebattue dans la littérature méréotopologique et qui illustre jusqu'à la caricature la façon dont une problématique intéressante peut s'abîmer en une série de questions oiseuses – de quelle couleur est la frontière séparant deux parties contiguës mais de couleurs différentes d'un même objet, est tout simplement un non sens. Une telle entité mathématique (de même qu'une entité purement abstraite tel l'équateur séparant les deux hémisphères) ne renvoie à aucune entité du monde « réel » : que pourrait bien être un objet sans étendue ? Dès lors, de quelles propriétés physiques celui-ci pourrait-il être pourvu ? Le centre de gravité d'un corps humain n'est ni de chair ni de sang.

De la même façon, les contradictions et les paradoxes auxquels les méréotopologies sont condamnées s'expliquent aisément : la topologie, y compris dans ses diverses généralisations (topologie sans points, topologie formelle, théorie des locales, lesquelles s'avèrent *in fine* des versions déguisées de la topologie ensembliste classique), et particulièrement le concept de frontière dans lequel se manifeste l'ancrage de la topologie sur le continu ensembliste, interdisent une saisie intuitive du spatial et entrent en contradiction avec la structuration qualitative de l'espace proposée par la méréologie. De plus, les méréotopologies laissent ouverts les problèmes qui lui donnèrent naissance.

Ces divers problèmes trouvent une solution élégante dans le cadre locologique (Breysse & De Glas, 2007). À titre d'exemple, le problème du *contact* peut être résolu de la façon suivante : si l'on considère que deux objets sont des éléments (ou, plus précisément, occupent des régions A et B, éléments) d'une colocologie $\mathcal{K}$[14] sur un certain espace, ces deux objets sont en contact ssi ils sont disjoints et sont à une « distance » nulle l'un de l'autre, c'est-à-dire ssi $A \cap B = \varnothing$ et $h \circ \lambda(A) \cap h \circ \lambda(B) \neq \varnothing$.

Le cadre locologique permet d'appréhender, à nouveaux frais la notion essentielle de continuité. Soit $(X, \mathcal{L}_X)$ et $(Y, \mathcal{L}_Y)$ deux espaces locologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite *continue* ssi

(C1) $f \circ s_X \subseteq s_Y$,

(C2) si $A \in \mathcal{L}_Y$ alors $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \in \mathcal{L}_X$.

La condition (C2), qui équivaut à

(C2') si $A \in \mathcal{K}_Y$ alors $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \in \mathcal{K}_X$,

évoque la continuité topologique : f^{-1} est un morphisme au sens où l'application réciproque de f préserve la structure locologique. La condition (C1) présente certaines similarités avec la continuité uniforme[15]. La continuité locologique intègre ainsi, sans s'y réduire, ces deux facettes de la continuité (travaux en cours sur les liens entre locologie, structures uniformes et ordres syntopogènes, Ch. Bertrand & M. De Glas).

La catégorie **Loc** dont les objets sont les espaces locologiques et les flèches les applications continues entre espaces locologiques est une catégorie cartésienne. En revanche, **Loc** n'est pas cartésienne fermée. En général, étant donnés trois espaces locologiques X, Y et Z quelconques, nous n'avons pas les bijections suivantes

$$\mathrm{Hom}(Z, Y^X) \cong \mathrm{Hom}(X \times Z, Y)$$

$$(Y^X)^Z \cong Y^{X \times Z}.$$

De façon un peu plus précise, pour tout $g : X \times Z \to Y$, soit $g^\blacklozenge : Z \to Y^X$ l'adjoint de g et e la flèche d'évaluation $e : Y^X \times X \to Y$, $\langle f, x \rangle \mapsto f(x)$, définie par $e \circ (g^\blacklozenge \times 1_X) = g$ où 1_X est la flèche identité de X. Alors, e n'est pas continue : elle satisfait (C1) mais pas (C2).

4.2.3 Toute locologie $\mathcal{L}$ sur un espace X peut être munie, outre les opérateurs qui en font une locologie, de deux autres opérateurs qui en dessinent les contours logico-algébriques. On définit, tout d'abord, un opérateur unaire de *négation*, en posant

$$\neg A = h(A^*),$$

[14] A rebours de la modélisation topologique, proposée par Thom, selon laquelle un objet du monde réel, puisqu'il doit contenir son « bord », est un fermé de $\mathbf{R}^4$, le « bord » est modélisé, dans le cadre locologique, par la frontière zonale interne. Un objet contient sa frontière interne, donc son « bord » (la peau du corps humain, l'écorce de l'orange) mais est disjoint de sa frontière linéaire, entité abstraite sans contrepartie dans le monde réel.

[15] Il n'est pas inutile de rappeler que structures topologiques et structures uniformes (donc continuité topologique et continuité uniforme) sont tout à fait indépendantes l'une de l'autre.

dont les propriétés essentielles sont

(i) $A \cap \neg A = \varnothing$,
(ii) $A \sqcup \neg A = X$,
(iii) $A \cup \neg A \neq X$,
(iv) $\neg\neg A = A$ ssi λ est symétrique.

Ainsi $\neg$ est-elle une complémentation dans $\mathcal{L}$ (et une orthocomplémentation ssi λ est symétrique). La signification logique de (i)-(iii) est que, à l'opposé du point de vue intuitioniste, le tiers exclu ne peut, en aucune façon, être vu comme un principe d'omniscience : bien que, pour tout A, $A \sqcup \neg A$ recouvre l'univers, il existe, en vertu de (iii), des objets qui n'appartiennent ni à A ni à $\neg A$. De plus, de (iii) et (iv), on déduit que le tiers exclu et la *reductio ad adsurdum* ne sont pas nécessairement interdépendants.

Ces deux points mettent, une nouvelle fois en évidence – cette fois, sous l'angle mathématique – le fait que l'« erreur » des intuitionistes relève, avant tout, d'une interprétation fallacieuse de la négation et de la disjonction.

On définit, de plus, un opérateur binaire d'*implication*, noté $\Rightarrow$, en posant

$$A \Rightarrow B = h(A^* \cup B).$$

Les propriétés essentielles de $\Rightarrow$ sont

(i) $A \Rightarrow B = X$ ssi $A \subseteq B$,
(ii) $A \Rightarrow \varnothing = \neg A$,
(iii) $A \cap (A \Rightarrow B) \subseteq B$,
(iv) $(A \Rightarrow B) \cap (A \Rightarrow C) \subseteq A \Rightarrow (B \cap C)$,
(v) $(A \Rightarrow B) \cap (B \Rightarrow C) \subseteq (A \Rightarrow C)$,
(vi) Si $C \subseteq A \Rightarrow B$ alors $A \cap C \subseteq B$.

En revanche, la réciproque de (vi),

$$\text{si } A \cap C \subseteq B \text{ alors } C \subseteq A \Rightarrow B,$$

est vraie ssi $\mathcal{L}$ est un treillis distributif (auquel cas $\mathcal{L}$ est une algèbre de Boole), c'est-à-dire ssi λ est transitive – cas sans intérêt. Ainsi, $\Rightarrow$ n'est pas, au sens strict, c'est-à-dire au sens de la définition de Church, une implication : on parlera, dès lors, de *semi-implication*.

L'invalidité de la réciproque de (vi) entraîne, en particulier, que

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \neq X,$$

bien que la règle

$$\frac{A = X}{B \Rightarrow A = X}$$

reste valide. Comme on le verra plus précisément ci-dessous, la traduction logique de cette inégalité n'est autre que l'invalidité de l'axiome du paradoxe positif et, conséquemment, l'affaiblissement du théorème de la déduction.

Les propriétés conjointes de la semi-implication et de la disjonction conduisent à

$$(A \Rightarrow C) \cap (B \Rightarrow C) \not\subset (A \sqcup B) \Rightarrow C,$$

la règle

$$\frac{A \Rightarrow C = X,\ B \Rightarrow C = X}{(A \sqcup B) \Rightarrow C = X}$$

étant, elle, conservée.

Les définitions de la négation, de la semi-implication (et de la disjonction) sont les instruments de la rupture, sur le plan logico-algébrique, que la locologie opère par rapport aux algèbres de Boole et aux algèbres de Heyting, partant par rapport à la logique classique et à la logique intuitioniste.

4.3 La logique localiste

Les propriétés de $(\mathcal{L}, \cap, \sqcup, \neg, \Rightarrow)$, pour toute locologie $\mathcal{L}$ sur un ensemble X, conduisent naturellement à en abstraire la structure. On définit ainsi le concept de *Λ-algèbre* comme étant un quintuplet $(L, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow)$ tel que

(1) $(L, \wedge, \vee)$ est un treillis avec un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1 et où $a \leq b$ ssi $a \wedge b = a$,

(2) $(L, \Rightarrow)$ satisfait, pour tout $a, b \in L$,

(a) $a \Rightarrow b = 1$ ssi $a \leq b$,

(b) $a \wedge (a \Rightarrow b) \leq b$,

(c) $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \leq (a \Rightarrow c)$,

(d) $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c) \leq a \Rightarrow (b \wedge c)$,

(3) $(L, \neg)$ satisfait, pour tout $a \in L$,

(a) $\neg a = a \Rightarrow 0$,

(b) $\neg\neg a = a$.

Une algèbre $(L, \wedge, \vee, \Rightarrow)$ qui vérifie (1) et (2) est appelée *Λ-algèbre positive*. Une algèbre $(L, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow)$ qui obéit à (1), (2) et

(3') $(L, \neg)$ satisfait, pour tout $a \in L$,

(a) $\neg a = a \Rightarrow 0$,

(b) $a \vee \neg a = 1$,

est appelée *Λ-algèbre faible*.

Il est clair que toute locologie $(\mathcal{L}, \cap, \sqcup, \neg, \Rightarrow)$ sur un ensemble X quelconque est une Λ-algèbre faible et une Λ-algèbre ssi la relation λ sous-jacente est symétrique. On fera l'hypothèse, dans ce qui suit, que λ est symétrique.

On démontre que toute Λ-algèbre peut être représentée, c'est-à-dire plongée monomorphiquement, dans une locologie sur un certain ensemble. Une Λ-algèbre est donc, à un monomorphisme près, une locologie sur un certain ensemble.

Ce concept de Λ-algèbre offre un point de passage de la locologie à la *logique localiste* qui en émerge – et qui fait l'objet de ce qui suit. La logique localiste, en première lecture, est à la locologie ce que la logique intuitioniste est à la topologie, le concept de Λ-algèbre jouant pour le premier couple le rôle dévolu à celui d'algèbre de Heyting pour le second.

Il est impossible d'entrer, ici, dans les détails de la logique localiste. Elle se caractérise, toutefois, dans sa rupture par rapport à la logique intuitioniste (et à la logique classique) par les traits suivants : affaiblissement de la disjonction et de l'implication, renforcement de la négation.

Pour ce qui est de l'implication, la logique localiste rejette, pièce essentielle de la rupture, l'axiome du paradoxe positif

$$\phi \to (\psi \to \phi),$$

pour ne conserver que la règle d'inférence « correspondante »

$$\frac{\phi}{\psi \to \phi}$$

De fa□on □quivalente, en termes de calcul des séquents, la règle d'introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi \to \phi}$$

est invalide. Il en résulte un affaiblissement du théorème de la déduction : de $\phi \vdash \psi$ on peut déduire $\vdash \phi \to \psi$ et, par suite, de $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ on déduit $\vdash \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \to \psi$; en revanche, de $\Gamma, \phi \vdash \psi$ on ne peut pas déduire, en général, $\Gamma \vdash \phi \to \psi$.

La validité de

$$\text{si} \vdash \phi \ \text{ alors } \ \vdash \psi \to \phi,$$

et, par suite, celle de

$$\text{si } \psi \vdash \phi \ \text{ alors } \ \vdash \psi \to \phi,$$

que les pertinentistes, à la suite des travaux de Lewis (1918), rejettent, sous le nom de paradoxe de l'implication matérielle, signifie simplement que, si ϕ est un théorème alors il peut être démontré à partir de n'importe quoi, y compris le faux. Le point de vue des pertinentistes repose sur une confusion entre connecteur d'implication (« matérielle ») et implication sémantique, confusion derrière laquelle se profile, pour reprendre l'expression de Weyl (1940), le « fantôme de la modalité », et sur l'ignorance du fait qu'un théorème n'est pas (seulement) le résultat de la déduction à partir d'un ensemble vide ($\Gamma = \varnothing$) d'hypothèses.

En revanche, l'invalidité de

$$\text{si } \Gamma, \psi \vdash \phi \ \text{ alors } \ \Gamma \vdash \psi \to \phi,$$

signifie que, si ϕ est prouvable à partir de Γ, il n'y a aucune raison que $\psi \to \phi$ le soit également *gratis prodeo*, pour toute formule ψ. Bien que hautement non constructive, cette dérivation est possible en logique intuitioniste.

La règle d'introduction de l'implication en calcul des séquents localiste s'écrit

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \eta}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \eta}$$

ssi Γ et η satisfont l'une des propriétés suivantes :

(a) $\Gamma = \varnothing$

(b) $\Gamma = \{\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\}$, $\eta = \chi$

(c) $\Gamma = \{\phi \rightarrow \psi, \phi \rightarrow \chi\}$, $\eta = \psi \wedge \chi$.

Pour ce qui concerne la disjonction, la logique localiste se caractérise par le rejet de l'axiome (classique et intuitioniste)

$$(\phi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi)$$

pour ne conserver que la règle d'inférence

$$\frac{\phi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi}{\phi \vee \psi \rightarrow \chi}$$

De façon équivalente, la règle d'élimination de la disjonction en calcul des séquents s'écrit

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \phi \vdash \chi \quad \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}$$

Enfin, la logique localiste satisfait l'axiome du tiers exclu :

$$\Gamma \vdash \phi \vee {\sim}\phi.$$

Mais de $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$, il est impossible de conclure que $\Gamma \vdash {\sim}\phi \rightarrow \psi$. Comme annoncé, le tiers exclu n'est en aucune façon un principe d'omniscience : par exemple, de $\vdash \phi \vee \psi$, il est impossible de déduire ${\sim}\phi \vdash \psi$.

Sur le plan sémantique, on dit que ϕ est Γ-valide, $\Gamma \Vdash \phi$, ssi il existe un sous-ensemble fini Γ_0 de Γ tel que, pour toute Λ-algèbre L et toute valuation $v : \Phi \rightarrow L$,

$$\bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} v(\gamma) \leq v(\phi).$$

On démontre alors que, pour toute fbf ϕ, ϕ est Γ-valide ssi ϕ est prouvable à partir de Γ (théorème de complétude) :

$$\Gamma \Vdash \phi \quad \text{ssi} \quad \Gamma \vdash \phi,$$

et que Γ est cohérent (il n'existe aucune formule ϕ telle que $\Gamma \vdash \phi$ et $\Gamma \vdash {\sim}\phi$) ssi Γ est satisfiable (il existe une valuation v telle que $v(\gamma) = 1$, pour tout $\gamma \in \Gamma$).

L'affaiblissement de la disjonction localiste est la contrepartie logique de la propriété algébrique de la disjonction dans une Λ-algèbre (et dans une locologie) : la disjonction n'est pas une réunion ensembliste. De même, l'affaiblissement du théorème de la déduction (de façon équivalente, l'abandon de l'axiome du paradoxe positif) est la traduction logique de la non distributivité des Λ-algèbres, qui est, elle-même, la traduction algébrique de la non idempotence des opérateurs de cœur et d'ombre dans un espace locologique (laquelle résulte de la non transitivité de la relation de ressemblance sous-jacente).

Le passage au premier ordre ne pose d'autres problèmes que techniques (au demeurant d'une extrême complexité). On démontre, en effet, que, pour toute théorie T, $T \Vdash \phi$ ssi $T \vdash \phi$ et qu'une théorie est satisfiable ssi elle est cohérente.

4.4 Substrat catégorique

Une Λ-algèbre étant un treillis non distributif (dont la disjonction est plus faible que ses homologues classique et intuitioniste) et munie d'une semi-implication, l'éventuelle construction d'un substrat catégorique pour la logique localiste et la locologie, qui jouerait pour ces dernières le rôle joué par la théorie des topoï pour la logique intuitioniste et la topologie, et par la théorie des ensembles pour la logique classique, passe par un affaiblissement de l'exponentiation.

On définit ainsi le concept de semi-exponentiation. Une catégorie $\mathcal{A}$ est munie d'une *semi-exponentiation* si

(i) tout couple $\langle A, B\rangle$ d'objets de $\mathcal{A}$ a un produit $A \times B$,

(ii) pour tout couple $\langle A, B\rangle$ d'objets de $\mathcal{A}$, il existe un objet B^A et une flèche d'évaluation $e : B^A \times A \to B$ telle que, pour toute flèche $g : C \times A \to B$, il existe au plus une flèche $g^\blacklozenge : C \to B^A$:

$$\frac{g : C \times A \to B}{g^\blacklozenge : C \to B^A}$$

appelée *adjointe* de g, telle que $e \circ (g^\blacklozenge \times 1_A) = g$.

(iii) les flèches suivantes ont une flèche adjointe :

$$\frac{i : A \to B}{i^\blacklozenge : 1 \to B^A}$$

$$\frac{j : C^B \times B^A \times A \to C}{j^\blacklozenge : C^B \times B^A \to C^A}$$

$$\frac{k : B^A \times C^A \times A \to B \times C}{k^\blacklozenge : B^A \times C^A \to (B \times C)^A}$$

Une catégorie $\mathcal{A}$ munie

(i) d'un objet initial 0 et d'un objet terminal 1,

(ii) d'un pullback et d'un pushout pour tout couple de flèches,

(iii) d'une semi-exponentiation,

est appelée un *prelocus*.

Un sous-objet d'un objet X dans un prelocus $\mathcal{A}$ est défini de la façon suivante. Soit f et g deux monos, $f : A \to X$, $g : B \to X$. On pose $f \subseteq g$ ssi il existe un mono $h : A \to B$ tel que $f = g \circ h$. Alors, la relation $\approx$ définie par $f \approx g$ ssi $f \subseteq g$ et $g \subseteq f$ est une équivalence sur l'ensemble des monos ayant X pour codomaine. De plus, si $f \approx g$ alors il existe un iso $h : A \to B$ et son inverse k : $B \to A$ tels que $f = g \circ h$ et $g = f \circ k$. La classe d'équivalence de f modulo $\approx$, notée $[f]$, est appelée *sous-objet* de X. L'ensemble des sous-objets de X est donc

$$\mathrm{Sub}(X) = \{[f] : f : A \to X \text{ est un mono}, A \text{ objet de } \mathcal{A}\}.$$

On écrira en général $f \approx g$ pour $[f] \approx [g]$, en réservant toutefois l'égalité $f = g$ au cas où f et g désignent la même flèche.

L'ensemble Sub(X) peut être muni d'un certain nombre d'opérations. Étant donnés deux sous-objets, $f : A \to X$, $g : B \to X$, on définit la *conjonction* $f \cap g$: $A \times_X B \to X$ de f et g comme le pullback de f et g. La *disjonction* de $f : A \to X$ et $g : B \to X$ est le sous-objet $f \cup g : A \cup B \to X$, flèche image de $[f, g] : A + B \to X$, avec $(f \cup g) \circ [f, g]^\dagger = [f, g]$, c'est-à-dire que $[f, g]^\dagger$ et $f \cup g$ sont l'epi-mono factorisation de $[f, g]$. Pour tout objet X, (Sub(X), $\cap$, $\cup$, $\subseteq$) est un treillis avec un plus petit élément 0_X et un plus grand élément 1_X qui, toutefois, n'est pas distributif. Soit, en effet, $f : A \to X$, $g : B \to X$ et $h : C \to X$ trois sous-objets de X tels que

$$f \cap g \approx f \cap h \approx 0_X,$$
$$f \cup g \approx f \cup h.$$

Alors $f \cup g \approx [f, g]$ et $f \cup h \approx [f, h]$. Mais g et h ne sont pas équivalents puisque B et C ne sont pas isomorphes.

On définit, ensuite, pour tout couple $f : A \to X$ et $g : B \to X$ de sous-objets de X, la *semi-implication* $f \Rightarrow g : B^A \to X$ par

$$f \cap (f \Rightarrow g) \subseteq f \cap g.$$

Cette définition garantit l'existence mais non l'unicité de $f \Rightarrow g$, qui jouit toutefois, quel que soit le choix fait, des propriétés suivantes :

(i) $f \Rightarrow g \approx 1_X$ ssi $f \subseteq g$,

(ii) $(f \Rightarrow g) \cap (g \Rightarrow h) \subseteq f \cap h$,

(iii) $(f \Rightarrow g) \cap (f \Rightarrow h) \subseteq f \Rightarrow (g \cap h)$,

(iv) si $h \subseteq f \Rightarrow g$ alors $h \cap f \subseteq g$.

En revanche, la réciproque de (iv) est fausse. Conjonction, disjonction et semi-implication dans l'ensemble Sub(X) des sous-objets d'un objet X quelconque d'un prelocus confèrent donc à (Sub(X), $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$, $\subseteq$) une structure de Λ-algèbre positive.

Dans un prelocus $\mathcal{A}$, on peut associer à tout sous-objet $f : A \to X$ d'un objet X le sous-objet $\neg f : -A \to X$ défini par $\neg f \approx f \Rightarrow 0_X$ et appelé *complément* de f. On démontre immédiatement que :

(i) $f \cap \neg f \approx 0_X$,

(ii) si $f \subseteq g$ alors $\neg g \subseteq \neg f$.

Un prelocus dans lequel, pour tout sous-objet $f : A \rightarrow X$, pour toute flèche $k : 1 \rightarrow A$ et toute flèche $k' : 1 \rightarrow --A$, $\neg\neg f \circ k' \approx f \circ k$, est appelé un *locus*, structure dans laquelle la complémentation vérifie les propriétés suivantes :

(i) $f \approx \neg\neg f$,

(ii) si $\neg f \subseteq \neg g$ alors $g \subseteq f$,

(iii) $f \cup \neg f \approx 1_X$,

(iv) $\neg(f \cup g) \approx \neg f \cap \neg g$,

(v) $\neg(f \cap g) \approx \neg f \cup \neg g$.

En revanche, $f \cap g \approx 0_X$ n'implique pas $g \subseteq \neg f$.

Les concepts de locus et de prelocus fournissent donc un fondement catégorique à la logique localiste et à la locologie dont l'une des facettes est le théorème de validité suivant. Étant donné un locus $\mathcal{A}$, une formule $\phi \in \Phi$ est $\mathcal{A}$-*valide*, $\mathcal{A} \Vdash \phi$, ssi, pour tout objet X de $\mathcal{A}$ et pour toute valuation $v : \Phi \rightarrow \mathrm{Sub}(X)$, on a $v(\phi) = 1_X$. On démontre alors l'équivalence entre validité localiste et validité dans un locus quelconque :

$$\vdash \phi \quad \text{ssi } \mathcal{A} \Vdash \phi, \text{ pour tout locus } \mathcal{A}.$$

En outre, un locus muni de l'exponentiation est un topos, où $f \Rightarrow (g \Rightarrow f) \equiv 1_X$ et $h \subseteq f \Rightarrow g$ ssi $h \cap f \subseteq g$, pour tous sous-objets $f : A \rightarrow X$, $g : B \rightarrow X$ et $h : C \rightarrow X$. Cela nous conduit à examiner la théorie des loci du point de vue de la possibilité, ou de la nécessité, de l'internalisation des opérateurs algébriques définissant Sub(X) pout tout objet X d'un locus (ou, de façon équivalente, des connecteurs de logique localiste). La question est d'importance dans la mesure où la définition d'un locus fait l'économie du concept de classificateur de sous-objets et que les connecteurs logiques ou les opérateurs algébriques correspondants n'ont pas, *a priori*, de contrepartie interne.

La divergence entre point de vue interne et point de vue externe dans un topos est, non seulement, un révélateur des conflits d'interprétation au sein de l'intuitionisme (voir Section 3.2) mais est, de plus, à l'origine de problèmes au sein de la théorie des topoï.

Ainsi en est-il du tiers exclu et, plus encore, des rapports que celui-ci entretient avec l'axiome du choix. Dans un topos $\mathcal{T}$, le tiers exclu externe n'est autre que l'égalité ensembliste $\mathrm{Hom}(1, \Omega) = \{\top, \perp\}$. Du point de vue interne, $\mathcal{T}$ satisfait le tiers exclu ssi

$$\top : 1 \rightarrow \Omega \leftarrow 1 : \perp$$

est un coproduit. Dans **Set**, ces deux points de vue sont équivalents mais, dans un topos quelconque, aucun des deux énoncés n'implique l'autre.

L'axiome du choix simple pose de redoutables difficultés (voir Section 3.2) que les formulations interne et externe dans un topos aggravent encore. Dans un topos, la version externe du choix simple est : pour tout objet X, autre que l'objet initial, il existe au moins une flèche $1 \to X$. La version interne, en raison de l'absence de quantificateurs non bornés dans la sémantique de Mitchell-Bénabou, n'est autre que la reformulation par forcing de l'existence de la famille (externe) d'énoncés de ce langage : pour tout objet X, autre que l'objet initial, la flèche unique $X \to 1$ est un épi. De plus, si cette version interne peut être déduite de la version externe, la réciproque est fausse. Enfin, à l'équivalence, en théorie des ensembles, entre le choix simple et le tiers exclu se substitue l'énoncé : un topos satisfait le choix simple interne ssi il satisfait le tiers exclu externe.

L'axiome du choix entretient avec le tiers exclu des rapports encore plus complexes. La version externe du choix postule que les foncteurs Hom(X, .) préservent les épis. La version interne impose que ce soit les endofoncteurs $(.)^X$ qui vérifient cette propriété. La version externe implique la version interne mais la réciproque est fausse. Le théorème de Diaconescu (1975), qui établit que si un topos satisfait le choix externe alors il satisfait le tiers exclu interne, combiné au théorème de Freyd (1972), en vertu duquel tout topos qui satisfait le choix interne peut être plongé dans un topos qui satisfait le choix externe, conduit au théorème suivant, improprement attribué à Diaconescu : si un topos satisfait l'axiome du choix interne, alors il satisfait le tiers exclu interne.

La plupart des analyses de la théorie des topoï sont obérées par une confusion entre point de vue interne et point de vue externe. Les véritables leçons de la non convergence, sur des concepts essentiels, de ces deux points de vue (ignorées de la plupart des commentateurs, souvent masquées par les théoriciens des topoï) n'ont jamais été véritablement tirées. Doit-on conclure, par exemple, de ce que l'équivalence ensembliste entre le choix simple et le tiers exclu fait place, sur le plan logique, à une version affaiblie que le choix simple est plutôt de nature ensembliste ? Inversement, le fait que, du point de vue de la logique interne d'un topos, le choix entraîne le tiers exclu doit-il conduire à considérer le second comme un affaiblissement du premier et plaider en faveur de la nature plutôt logique qu'ensembliste de l'axiome du choix (Ageron, 2002) ?

La théorie des topoï et ses deux dimensions, interne et externe, brouille le débat autour de la question du tiers exclu, du choix simple et du choix, plus généralement entre logique et mathématique. Le concept de classificateur de sous-objets, instrument de l'internalisation, ne conduit-il pas à la remise en cause du primat du structurel sur le logique ? Sur le plan mathématique, l'équivalence entre validité intuitioniste et validité dans un topos cache (mal) une situation problématique, indépendante du conflit qui s'exerce au sein même de la sémantique intuitionniste (celle-ci est révélée, celle-là est créée par le clivage interne-externe). En effet, d'un côté, validité intuitionniste et validité dans un topos dépendent exclusivement de la structure algébrique, donc externe, de l'algèbre Sub(1) des sous-objets de l'objet terminal, Sub(1) n'étant pas un objet du topos. D'un point de vue interne – lequel devrait prévaloir sur le plan logique puisque c'est de la logique interne d'un topos qu'il est question –, ce qui importe, pour tout objet X, c'est l'objet Ω^X, version interne du concept de puissance dont Sub(X) est la version externe. Mais cet objet exponentiel ne joue aucun rôle dans la définition de la validité dans un topos. Cet conflit culmine dans un résultat hautement contre-intuitif : il existe des topoï non-booléens, c'est-à-dire des topoï dans lesquels Sub(Ω) n'est pas une algèbre de Boole, qui valident la logique classique. L'affirmation selon laquelle la théorie des topoï est à la logique intuitionniste ce que la logique classique est à la théorie des ensembles et que la première est la « bonne » (entendez la seule raisonnable et intéressante) généralisation de cette dernière mérite plus qu'un bémol.

Ces limitations – beaucoup plus fortes qu'on ne le concède généralement – de la théorie des topoï sont inscrites dans la définition même du concept de classificateur. La théorie des loci est vierge de tels travers. On peut, bien sûr, y définir un classificateur mais les connecteurs de la logique localiste ne sont pas internalisables : la logique localiste « émerge » du substrat catégorique. Par ailleurs, si l'on définit un locus booléen comme étant un locus dans lequel Sub(X) est, pour tout X, une algèbre de Boole (c'est-à-dire dans lequel $f \Rightarrow (g \Rightarrow f) \equiv 1_X$ et $h \subseteq f \Rightarrow g$ ssi $h \cap f \subseteq g$, pour tous sous-objets $f : A \to X$, $g : B \to X$ et $h : C \to X$), alors la prouvabilité classique est équivalente à la validité dans tout locus booléen.

RÉFÉRENCES

Ageron, P. (2002), L'autre axiome du choix, *Revue d'histoire des mathématiques*, 8, 113-140.

Barot, E. (2005), En quoi la crise des fondements des mathématiques est-elle terminée, *Philosophia Scientiae*, 9 (2), 1-18.

Barthélemy, J.-P., De Glas, M., Desclés, J.-P. & Petitot, J. (1996), Logique et dynamique de la cognition, *Intellectica,* 22, 219-302.

Bell, J. (2000), Hermann Weyl on Intuition and the Continuum, *Philosophia Mathematica,* (3) 8, 259-273.

Berque, A. (2000), *Écoumène. Introduction à l'étude des milieux humains*, Paris : Belin.

Berthoz, A. (2001), *Le sens du mouvement*, Paris : Odile Jacob.

Breysse, O. & De Glas, M. (2007), A New Approach to the Concepts of Boundary and Contact : Toward an Alternative to Mereotopology, *Fundamenta Informaticae*, 78, 2, 217-238.

Breysse, O. & De Glas, M. (2007), On Boundaries and Contact, *Logic Colloquium*, Nijmegen.

Brouwer, L.E.J. (1912), Intuitionisme et formalisme, Discours d'ouverture à l'Université d'Amsterdam ; tr. angl. A. Dresden : Intuitionism and Formalism, *Bull. Amer. Math. Soc.* 20, (1913), 81-96 ; tr. fr. : Intuitionisme et formalisme, in J. Largeault, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin, (1992), pp. 39-53.

Brouwer, L.E.J. (1923), Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 154, 1-8 ; tr. fr. : Sur le rôle du principe du tiers exclu dans les mathématiques, spécialement en théorie des fonctions, in J. Largeault, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin, (1992), pp. 197-205.

Brouwer, L.E.J. (1925), Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, *Jahresbericht deutsch. Math. Ver*. 33, 251-256 ; tr. fr. : Dissociation intuitioniste de notions fondamentales des mathématiques, in J. Largeault, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin, (1992), pp. 223-228.

Brouwer, L.E.J. (1929), Mathematik, Wissenschaft, und Sprache, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 36, 152-64 ; tr. fr. : Mathématique, science et langage, in J. Largeault, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin, (1992), pp. 253-69.

Cantor, G. (1874), Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller Reellen Algebraischen Zahlen, *Journal de Crelle*, 77, 242-258 ; trad. fr. : Une contribution à la théorie des ensembles, *Acta Mathematica* 2(1), (1883), 311-328.

Cantor, G. (1878), Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 84, 258-262 ; trad. fr. : Fondements d'une théorie générale des ensembles, *Acta Mathematica* 2(1), (1883), 382-408.

Cantor, G. (1883), Grundlagen einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, *Mathematische Annalen*, 21, 545-586 ; trad. fr. : Une contribution à la théorie des ensembles, *Acta Mathematica* 2(1), (1883), 311-328.

Cartier, P. (1986), Analyse non standard : nouvelles méthodes infinitésimales en analyse. Application à la géométrie et aux probabilités, *Journées X-U.P.S.*, Vol. 4, Centre de Mathématiques, École Polytechnique, Palaiseau, 141-162.

Cech, E. (1966), *Topological Spaces*, Wiley.

Changeux, J.-P. & Connes, A. (2000), *Matières à pensée*, Paris : Odile Jacob.

Châtelet, G. (1993), *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*, Paris : Seuil.

Choquet, G. (1947), Convergences, *Annales de l'Université de Grenoble*, 23, 55-112.

Ciattoni, A. & Veyret, X. (2003), *Les fondamentaux de la géographie*, Paris : Armand Colin.

Cohen, P. (1966), *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin.

Cohn, A.G. & Varzi, A. (1999), Modes of Connection, in C. Freska & D. Mark (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Spatial Information Theory*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, pp. 299-314.

Cohn, A.G. & Varzi, A. (2003), Mereotopological Connection, *Journal of Philosophical Logic*, 32, 357-390.

De Glas, M. (1990), Locological Spaces : Knowledge Representation in an Intensional Setting, *Cognitiva*, Madrid, 437-445.

De Glas, M. (1992), A Local Intensionnal Logic, *International Conference on Algebraic Methods and Their Computer Science Applications*, Polish Academy of Sciences, Warsaw.

De Glas M. (1997), Subintuitionistic Logic and Locology, *Logic Colloquium*, Leeds.

De Glas, M. & Plane, J.-L. (2005), *Une approche formelle de la typicité*, Cahiers du CREA, numéro 20, École Polytechnique, 187 pages.

De Glas, M. (à paraître en 2010), Localistic Logic.

De Glas M., (à paraître en 2010), A Note on Non Standard Analysis.

Dedekind, R. (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen* ?, Vieweg, Braunschweig ; trad. fr. C. Duverney : Que sont et que doivent être les nombres ?, in *Traité sur la théorie des nombres*, Éditions du Tricorne, pp. 59-148.

Diaconescu, R. (1975), Axiom of Choice and Complementation, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 51, 176-178.

Feferman, S. (1989), Infinity in Mathematics. Is Cantor Necessary ?, *Philosophical Topics XVII*, 2, 23-45.

Feferman, S. (1998), *In the Light of Logic*, Oxford: Oxford University Press.

Fourman, M. (1977), The Logic of Topoi, in J. Barwise (Ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland.

Friedman, M. (1999), *Reconsidering Logical Positivism*, Cambridge: Cambridge University Press.

Freyd, P. (1972), Aspects of Topoï, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 7, 1-76.

Girard, J.-Y. (2000), Du pourquoi au comment : la théorie de la démonstration de Hilbert à la logique linéaire, in Charpentier, Habsieger & Nikolski (Eds.) *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, Cassini, pp. 37-100.

Goldblatt, R.I. (1998), *Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonstandard Analysis*, Springer.

Granger, G.G. (1999), *La pensée de l'espace*, Paris : Odile Jacob.

Griffin, T.G. (1990), A Formulae-as-types Notion of Control, *Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*.

Heyting, A. (1930), Sur la logique intuitionniste, *Académie Royale de Belgique*, *Bulletin* 16, 957-63.

Hilbert, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig ; trad. fr. P. Rossier : *Les fondements de la géométrie*, (1997), Gabay.

Hilbert, D. (1927), Die Grundlegung der Mathematik, *Abh. Aus Math. Semin. Hamb. Univ. 6*, 65-83 ; tr. fr. : Les fondements des mathématiques, in J. Largeault, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin, (1992), pp. 145-164.

Husserl, E. (1901), *Recherches logiques*, tome 3, *Éléments d'une élucidation phénoménologique de la connaissance* ; tr. fr. H. Elie, A.L. Kelkel, R. Schérer, 1961, Presses Universitaires de France.

Husserl, E. (1913), *Idées directrices pour une phénoménologie* ; tr. fr. P. Ricœur, (1950), Paris : Gallimard.

Husserl, E. (1929), *Méditations cartésiennes* ; tr. fr. G. Peiffer, E. Levinas, (1969), Paris : Vrin.

Johnstone, P.T. (1983), The Point of Pointless Topology, *Bulletin of the American Mathematical Society* 8(1), 41-53.

Joinet, J.-B. (Ed.) (2007), *Logique, dynamique et cognition*, Publications de la Sorbonne.

Kolmogorov, A.N. (1929), Sur le principe du tiers exclu (en russe), *Mathematicheski Sbornik* 32, 646-647.

Kolmogorov, A.N. (1951), *Collected Works*, Vol. I, *Mathematics and Mechanics*. Kluwer.

Labarrière, J.-L. (2005), *La condition animale. Études sur Aristote et les Stoïciens*, Leuvens : Peeters.

Lachterman, D.R. (1989), *The Ethics of Geometry*, London : Routeledge and Keegan Paul.

Largeault, J. (1992), *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin.

Largeault, J. (1993), *Intuition et intuitionisme*, Paris : Vrin.

Le Goff, J. (1981), *La naissance du purgatoire*, Paris : Gallimard.

Lesniewski, S. (1927-1931), O Podstawach Matematyki I-V. *Przeglad Filozoficzny*, 30-34 ; tr. fr. G. Kalinowski, *Sur les fondements de la mathématique*, (1989), Hermès.

Lesniewski, S. (1992), *Collected Works*, Vol. I-II, Kluwer.

Lewis, C.I. (1918), *A Survey of Symbolic Logic*, University of California Press.

Martin-Löf, P. (1984), *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis.

Nelson E. (1977), Internal Set Theory: A New Approach to Non Standard Analysis, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83, 1165-1198.

Petitot, J. (1995), Pour un platonisme transcendental, in M. Panza & J.-M. Salanskis (Eds.), *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles*, Masson.

Petitot, J., Varela, F., Pachoud, B. & Roy, J.-M. (1999), *Naturalizing Phenomenology. Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, Stanford University Press ; tr. fr. : *Naturaliser la phénoménologie* (2002), CNRS Éditions.

Popescu, V. (2003), Espace et mouvement chez Stumpf et Husserl. Une approche géométrique, *Studia Phænomenologica* III, 1-2, 115-133.

Robinson, A. (1966), *Non Standard Analysis*, Amsterdam : North-Holland.

Poincaré, H. (1902), *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion.

Poincaré, H. (1905), *La valeur de la science*, Paris : Flammarion.

Salanskis, J.-M. (1999), *Le constructivisme non standard*, Presses Universitaires du Septentrion.

Salanskis, J.-M., Sinaceur, H. (Eds.) (1992), *Le labyrinthe du continu*, Springer.

Schaeffer, J.-M. (2007), *La fin de l'exception humaine*, Paris : Gallimard.

Séron, D. (2006), Phénoménologie naturalisée, *Approches phénoménologiques dans les sciences humaines*, Université de Liège.

Smith, B. & Woodruff, D. (Eds.) (1995), *The Cambridge Companion to Husserl*, Cambridge: Cambridge University Press.

Smyth, M.B. (1995), Semi-metric, Closure Spaces and Digital Topology, *Theoretical Computer Science* 151, 257-276.

Thom, R. (1988), *Esquisse d'une sémiophysique. Physique aristotélicienne et théorie des catastrophes*, Interéditions.

Thom, R. (1992), L'antériorité ontologique du continu sur le discret, In J.-M. Salanskis & H. Sinaceur (Eds.), *Le labyrinthe du continu*, Springer France.

Troelstra, A.S. & van Dalen, D. (1988), *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, vol. 1, Amsterdam: North-Holland.

Veronese, G. (1891), *Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più spezie di unita rettilinee espositi in forma elementare*, Padova.

Weyl, H. (1927), *Philosophy of Mathematics* ; tr. angl. (1949), Princeton University Press.

Weyl, H. (1940), The Ghost of Modality, *Philosophical Essays in Memory of Edmund Husserl*, Harvard University Press, pp. 278-303.

Whitehead, A. (1916), La théorie relationniste de l'espace, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 23, 423-454.

Woodin, W.H. (2001), The Ω-conjecture, *Aspects of Complexity*, De Gruyter.

Zeeman, E.C. (1961), The Topology of the Brain and Visual Perception, in K. Fort (Ed.), *Topology of 3-Manifolds*, Prentice-Hall, pp. 240-257.

Zeeman, E.C. & Bunemen, O.P. (1968), Tolerance Spaces and the Brain, in C.H. Waddington (Ed.), *Towards a Theoretical Biology*, Oxford: Oxford University Press, pp. 140-151.