Intellectica, 2004/2, **39**, pp. 289-297

Cognition et fondements des mathématiques

Giuseppe LONGO *

JALON COMMENTAIRE À PARTIR DE L'ARTICLE : « À PROPOS DE L'APPORT DES SCIENCES COGNITIVES À LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES »
DE F. DORIDOT ET M. PANZA[1]

Doridot et Panza nous proposent une interprétation très intéressante d'un domaine de recherche relativement nouveau. Ce domaine peut jouer un rôle important dans l'analyse des fondements des mathématiques et, même, dans le développement de leurs applications (c'est une des thèses que j'essayerai d'esquisser plus bas).

I. Discutons d'abord un aspect, au cœur des préoccupations des auteurs, et qu'il faut mettre en évidence avec encore plus de force. Au cours du XX siècle, les rapports entre philosophie et mathématiques ont été dominés par la Logique Mathématique. Branche des mathématiques du plus grand intérêt et qui, à partir de 1931, année de l'un des plus grands résultats mathématiques du siècle (l'incomplétude gödelienne), a acquis le double statut de discipline techniquement profonde et philosophiquement centrale. Du point de vue fondationnel, la Théorie de la Preuve en a constitué l'aspect principal, notamment grâce à des résultats tout à fait importants (de trois ordres : l'analyse ordinale après Gentzen, la Théorie des Types à la Church-Gödel-Girard, d'autres formes d'incomplétude-indépendance en Théorie des Ensembles et en Arithmétique) qui ont permis de circonscrire une notion capitale ayant au moins une retombée technologique d'envergure : les *fonctions pour le calcul des preuves* (Herdrand, Gödel, Church), autrement dit « la Logic Computing Machine » (Turing), c'est-à-dire le cœur mathématique de nos machines digitales.

A la fin du XIX siècle, la débâcle fondationnelle liée à la fin des certitudes euclidiennes rendait capitale l'analyse des preuves à partir de la cohérence formelle de l'arithmétique (l'arithmétique démontre-t-elle des absurdités ? et les géométries qu'on peut y encoder – toutes : Hilbert, 1899 -, sont-elles au moins non-contradictoires ?). Pour de nombreux philosophes, plus enclins à suivre qu'à inventer, toute l'analyse fondationnelle se réduisait aux miettes qui débordaient de ces grandes questions techniques (d'où les nombreux cours, dans les cursus de philosophie, sur … le calcul propositionnel, supposé être au cœur des fondements des mathématiques, voire du raisonnement humain !).

Et voilà qu'on en oublie qu'en mathématiques, il faut certes faire des preuves, ça fait partie du « métier », mais que l'activité mathématique se *fonde* tout d'abord sur la proposition, voire la construction de concepts et de structures. En fait, n'importe quelle preuve tant soit peu originale demande l'invention de nouveaux concepts et structures : la composante purement déductive suivra.

---

* CNRS et Département d'Informatique, École Normale Supérieure, Paris, et CREA, École Polytechnique ; http://www.di.ens.fr/users/longo.

[1] *Intellectica*, 2004/2, **39**, pp. 263-287.

« Laissons de côté cette “heuristique” et focalisons notre attention sur la reconstruction *a posteriori* de la certitude logique de la preuve », disaient les plus avisés des pères fondateurs. Programme absolument indispensable, comme je le disais, au début du XX siècle, après la richesse et la confusion technique du XIX – un siècle ayant produit une foule de résultats … dont de nombreux faux ou non prouvés ; un programme, toutefois, qui a exclu de l’analyse fondationnelle tout regard scientifique sur le *parcours constitutif* des concepts et structures mathématiques. Voilà ce à quoi vise précisément le nouveau projet des fondements cognitifs des mathématiques. Il ne faudra sûrement pas oublier la preuve, avec ses composantes logiques et formelles, mais simplement sortir de la monomanie (autrefois fort justifiée) qui a dominé le XX siècle et a engendré ces formidables machines logico-formelles qui nous entourent.

Pour mieux saisir cet enjeu il ne faut pas être ambigu sur le terme “formel”. Ce jalon me donne l’occasion de lever l’ambiguïté rencontrée dans l’article de D et P et qui est très répandue, en physique en particulier : mathématiser voudrait dire formaliser. Depuis le programme de Hilbert, voire jusqu’à sa forme “partiellement réalisée” telle qu’on la retrouve jusqu’en… 1988 (Journal of Symbolic Logic, 53, 2, 1988), « formel » veut dire : système donné par des suites *finies* de signes sans signification, gérées par des règles, elles-mêmes suites *finies* de signes, qui n’opèrent que par “sequence-matching” et “sequence-replacement” – comme le lambda-calcul et les Machines de Turing, par exemple, deux paradigmes pour tout formalisme effectif, une fois prouvé leur équivalence. Bien évidemment, il y a une circularité dans toute définition formelle de système formel, comme le rappellent les auteurs, tout comme il y en a quand on définit la notion de mot par des mots : rien de grave, on a l’habitude, tout comme certaines phrases qui parlent d’elles-mêmes et de leur propre fausseté… ne nous empêchent pas de parler des et par des phrases. Mais il y a bien plus que cela : suite à l’*overspill lemma* en Arithmétique (formelle) et, encore plus fort, depuis l’incomplétude, on sait que l’on ne peut pas définir formellement la notion de “fini”. En fait, il faut un axiome (un prédicat) de l’infini pour “isoler” les entiers finis standards. Remarque profonde qui anéantit le cœur de toute certitude finitiste, dont celle interne au formalisme logique. Bref, la *notion* de fini est très complexe, exige d’en passer par l’infini, si on veut la saisir formellement : elle est loin d’être “évidente”, dans le sens cartésien (et je pense qu’elle n’est pas très bonne : elle a peu de sens, par exemple, en cosmologie - voir la question : est-ce l’univers relativiste fini ou infini ?). De même pour les notions de continu (à la Cantor-Dedekind, typiquement) et de discret (ce deuxième terme étant à définir comme toute structure pour laquelle la topologie discrète est “naturelle”, dirais-je en mathématicien) : ont-elles du sens en Mécanique Quantique, où ce fameux “discret” est non-local, non-séparable (le contraire de la topologie discrète) et où un continu mathématique plus adapté ne devrait peut-être pas être fait des points cantoriens ? Voilà ces certitudes, voire ces prétendus absolus, de tout logicisme arithmétisant, le « fini », le « discret », qui retrouvent leur modeste statut de constructions biaisées par une histoire constitutive bien spécifique (et peut-être contingente, cf. plus bas). Or, la pratique et la construction cognitives du fini et du discret, dans nos espaces de l’action sensible, sont sûrement adaptées (elles sont ce qu’elles sont), mais les concepts dont elles sont à l’origine et qu’elles rendent signifiants peuvent être inadéquats en dehors de ces espaces, en cosmologie et en microphysique, par exemple. Cette remarque confirme le décalage, sur lequel les auteurs insistent fort justement, entre pratique cognitives élémentaires et finesse des constructions conceptuelles mathématiques, faites et à faire.

Quant au formel/mathématique, les auteurs peuvent bien garder leur ambiguïté de langage, où l'on identifie formel avec mathématique (structures "formelles" au lieu de "mathématiques", partout dans le texte), une fois clarifié l'enjeu ; ce n'est cependant que par cette distinction que l'on peut comprendre les résultats récents d'incomplétude *mathématique* des *formalismes*. Bref, dans la différence entre formel et mathématique, il n'y a rien de moins que certains des plus importants résultats de Théorie de la Preuve, en Arithmétique, des derniers 30 ans (voir Longo, 2002 et Bailly, Longo, 2004 pour des analyses). Dans cette différence se situe en fait la signification structurelle des nombres entiers, constitués dans des espaces cognitifs et historiques particuliers.

Bien évidemment, c'est la pratique du comptage, de l'ordonnancement, telle qu'elle est décrite par Dehaene et si bien analysée par les auteurs, qui est "derrière" la notion de nombre (entier, fini). Mais entre le petit décomptage que l'on possède en commun avec l'animal et le concept de nombre, il y a un abîme, celui du langage et de l'histoire. Les auteurs soulignent très bien cette insuffisance théorique grave qui associe directement à l'épisode cérébral, voire à la pratique animale, un concept. C'est l'histoire de la communauté humaine communicante qui manque. Il ne fait pas de doute que pour comprendre le concept, il nous a fallu le *produire* au moyen de pratiques anciennes partagées (c'est même la pluralité de ces pratiques, notamment celles du langage et de l'écriture, qui nous a conduit à l'invariant conceptuel), tout comme il est certain que quand on compte (ou l'on pense) quelque chose se passe dans le cerveau ; mais la confusion induite par de nombreux neuro-psychologistes (dans la revue *Mathematical Cognition* par exemple), entre le signal cérébral et le concept, est gravissime. Ce dernier voyage seulement dans l'intersubjectivité et l'histoire et les auteurs le disent très bien (§. I). Observons aussi que cette erreur du neuropsychologue est la même que celle du formaliste, qui confond le signe sans signification (voire le signal cérébral) avec le concept signifiant et qui conjecture la complétude du formalisme (Hilbert, 1900-20), - et pourquoi pas ? - de l'enchaînement des signaux cérébraux. Encore une fois, je trouve le livre de Dehaene très intéressant (et je l'ai dit dans un compte-rendu), mais il contient les germes du biais que l'on trouve dans ces analyses neuro-psychologiques : la recherche méthodique de correspondances, presque neurone par neurone, entre nombres et activité cérébrale. Or, si l'on ne cherche que cela (les traces cérébrales locales de telle ou telle activité), on trouvera tôt ou tard quelque chose (le cerveau est incroyablement complexe et tout se passe dans ses structures très enchevêtrées) ou l'on ne trouvera rien, car on ne trouvera jamais des contre-exemples à la théorie de la correspondance et localisation. Cela n'empêche que la revue *Mathematical Cognition*, avec sa technicité nouvelle, est une grande nouveauté pour les fondements des mathématiques : il faut juste l'intégrer dans une analyse de la conceptualisation, du langage et de l'histoire, ainsi que de la preuve avec sa logique.

II. L'analyse du travail de Lakoff et Nunez que font les auteurs est aussi très intéressante. Elle met en évidence les limites de cette tentative (qui a des mérites importants d'originalité) toute centrée sur deux notions : celle de métaphore et de mappage conceptuel et métaphorique. L'idée est stimulante, mais répétée à l'envi, elle s'use vite. Il est impossible de tout lire de ce point de vue, en particulier parce que Lakoff et Nuñez font totalement l'impasse sur l'histoire, comme le rappellent les auteurs. Or les mathématiques sont une "généalogie de concepts" (Riemann), une "conceptualisation progressive" (Enriquez). Que dire par exemple, du concept d'infini sans faire référence à son histoire, et en attendant que les neurophysiologistes en trouvent le neurone correspondant ? Le geste itéré et le mappage métaphorique de sa conclusion (la limite) ne suffisent pas. Il n'y a pas d'histoire constitutive de ce concept sans histoire au sens propre, d'Aristote à Saint Thomas et à Cantor. Tout comme pour les nombres réels : leur objectivité est dans la construction, qui est le résultat d'une pratique historique ; de même pour leur efficacité.

Nous arrivons maintenant à un point crucial que je voudrais préciser ici ; dans une note ainsi que dans le texte, les auteurs font référence à la "si grande stabilité et fiabilité" des mathématiques, dont il faudrait rendre compte. Quoique le point de vue développé dans l'article soit équilibré, il faut faire attention à ne pas pousser le lecteur dans la stupeur habituelle et pré-scientifique à l'égard de la "déraisonnable efficacité des mathématiques", titre trop fameux d'un article très modeste (mais pourquoi un très grand nom comme Wigner, n'a-t-il pas trouvé des exemples plus profonds pour étayer sa thèse ? L'article de Wigner, que tout le monde cite – à cause de son titre d'une efficacité publicitaire redoutable - et que très peu lisent, présente des exemples qui ne sont pas à la hauteur du propos).

Est-ce que les linguistes (cognitifs, par exemple) se disent tout étonnés : quel miracle, oh que les langues sont déraisonnablement efficaces ! Quand on parle, on se comprend ! Les langues sont nées autour de la communication, pour "se dire", en se comprenant. Quant à la stabilité et à l'invariance, comme je le dis dans un autre article, on peut même définir les mathématiques comme le fragment de nos formes de construction de connaissance maximalement invariant et stable, du point de vue conceptuel. Autrement dit, dès que l'on impose stabilité et invariance (maximale, je déteste les absolus), on est en train de faire des mathématiques. Sinon, c'est de la prose, qu'on le sache ou pas.

Encore une chose au sujet de l'efficacité : les mathématiques « collent » au monde (en fait à la science physique, à partir de l'espace physique – et sensible, où évoluent les figures d'Euclide), car elles sont co-constituées avec la connaissance (physique), elles ont été construites en résonance avec notre action de construction de l'objectivité et des objets (physiques). Bien évidemment, il se peut que … les nombres complexes, dérivés d'une pratique algébrique des équations, enrichis par une belle correspondance-compréhension avec/sur le plan cartésien, rendent intelligibles, deux siècles plus tard, la microphysique, par le biais de la mécanique quantique. Mais les langues naturelles nous fournissent aussi des outils qui se transfèrent d'un domaine à l'autre, qui organisent des expériences et des formes de vie tout à fait nouvelles. Ce faisant, elles s'enrichissent et changent, tout comme les mathématiques. Aucun miracle. Ce miracle est le grand questionnement de toute approche platonicienne (elles sont là-haut dans les cieux, depuis toujours, pourquoi fonctionne-t elle dans ce monde ? Réponse standard : puisque le monde se façonne dans les moules préconstituées de la détermination mathématique). Mais il se pose aussi pour le formaliste : pourquoi ces signes aux calculs potentiellement mécanisables, suites de "sequence-matching et sequence-replacement", nous disent quelque chose sur les structures signifiantes du monde ? Et certains nous expliquent : puisque le monde est une – très grande - machine de Turing (le génome un programme, l'évolution un algorithme, le cerveau un *switchboard* digital).

Si l'on se pose encore ce genre de problèmes, on ne pourra pas faire de l'analyse cognitive des mathématiques. Il faut par contre les voir comme le linguiste voit les langues, qui sont fort efficaces, quoique (relativement) *incomplètes* : relativement, car chaque semaine, je trouve un mot, une expression en italien qui dit quelque chose que l'on n'arrive pas exactement à dire en français, ou vice-versa (pour ne pas mentionner le chinois). Il y a donc des fragments (des situations, des sentiments, surtout) que chaque langue spécifique ne saisit pas, ou pas très bien, ou pas exactement comme une autre. Mais les langues et les mathématiques (et même les formalismes, dans leurs incomplétudes mathématiques) restent très efficaces. Car les mathématiques collent au monde comme l'écorce colle à un arbre, elles sont en elles-mêmes des interfaces, sans miracle dont il faudrait rendre compte. Et elles grandissent et se modifient avec lui. On doit en rendre compte, par une histoire possible, comme tout compte rendu scientifique, de la constitution phylogénétique et historique (cognitive) des concepts et des structures mathématiques, avec leur invariance conceptuelle maximale (les concepts mathématiques sont très stables, par définition). Leur efficacité et leur stabilité dynamique en suivra.

Or, si les mathématiques sont maximalement stables et invariantes par construction, c'est aussi là qu'elles trouvent leur limite. Elles naissent autour des invariants et des transformations qui les préservent, en commençant par les rotations et les translations chez Euclide. On arrive à mathématiser les situations les plus "chaotiques" quand on parvient à trouver la détermination globale (la loi dynamique, l'invariant) qui rend intelligible le plus étrange des attracteurs. Même les formes des nuages ou des côtes trouvent des *imitations* mathématiques formidables (non pas des modèles, voir Longo, 2002b), une fois proposé une bonne loi, un invariant fractal. Mais, dès que l'invariance est difficile à saisir ou qu'elle n'est pas au cœur du processus (elle n'est peut-être pas "ce qui compte"), les mathématiques, telles que nous les concevons aujourd'hui, sont dans l'impasse. Quels sont les grands invariants en biologie ? Si l'on fait référence à la biologie moléculaire, on en trouve, mais, quoique inhérente au vivant, cette dernière relève en fait de la chimie, non pas de la biologie. Le vivant est très stable, globalement, mais procède dans l'instabilité locale, qui, à son tour, peut modifier d'un coup jusqu'à la structure globale (e.g. la morphogenèse des espèces ; l'équilibre/évolution ponctué selon Gould). La notion de "situation critique étendue", à laquelle on travaille en ce moment, pourrait peut-être rendre compte de cette instabilité/stabilité, variance/invariance, que les mathématiques de la physique décrivent si mal.

On ne peut sûrement pas entrer dans le détail de ce questionnement ultérieur, mais il fait partie du même projet épistémologique : si les mathématiques sont un constitué, dans l'histoire, en commençant par des pratiques animales, l'analyse de leurs parcours constitutifs peut nous aider à expliciter des nouvelles dynamiques de connaissance, autour de nouveaux regards intentionnels. Et à ne pas plaquer partout les mêmes outils de la physique mathématique, comme s'ils étaient des absolus platoniciens ou des formalismes complets par rapport au monde, y compris celui du vivant.

III. L'article de Doridot et Panza encadre les meilleures idées présentes chez Dehaene, Lakoff et Nuñez d'une façon très efficaces : ces explorations, jointes aux analyses de Piaget et Berthoz, aussi citées, apportent, malgré leur limite, des éléments importants à cette nouveauté fondationnelle, l'analyse cognitive des mathématiques (à peine esquissée chez Poincaré). D'un autre ordre sont les travaux de P. Maddy, auxquels les auteurs fait aussi référence.

Contrairement à la richesse des données empiriques, questionnables sans doute, mais méthodiques, des neuropsychologues que l'on vient de mentionner, P. Maddy procède par "bon sens". Avec un biais, ancré dans la prétendue centralité de la théorie des ensembles dans les fondements des Mathématiques : elle regarde les objets du monde se rassembler sous nos yeux, collectionnés par prédicats. Or, les processus du bon sens ensembliste sont à l'opposé de la *constitution de sens* que l'on cherche à détecter dans le parcours constitutif des mathématiques. Il y a un abîme entre bon sens et constitution de sens et cet abîme s'appelle la construction de l'objectivité scientifique à laquelle participe les mathématiques. Mais la théorie des ensembles est (encore) très à la mode. Aucun mathématicien n'encode son travail dans ZF or NBG, mais presque toutes les préfaces de livres mathématiques, pour se justifier face à l'orthodoxie du siècle, garantit que son travail pourrait l'être et … utilise, tout au plus, de petites notations ensemblistes communes, outil très commode qui a sans doute unifié les mathématiques, mais qui n'engage pas beaucoup du point de vue fondationnel. Les Mathématiques sont une science des structures, elles rendent intelligibles des fragments du monde car elles les organisent, les corrèlent, les ordonnent: pour cette raison, l'analyse cognitive des mathématiques est l'exacte opposé de l'approche ensembliste et de son bon sens cognitif, un regard sur des points ou objets éparpillés. Même le comptage et l'ordonnancement, au cœur des pratiques si souvent cités, organisent, établissent des corrélations, de l'ordre. Encore plus l'acte de suivi d'une trajectoire, la constitution de sa mémoire, abstraite en tant que mémoire d'une prévision (voir Bailly et Longo, 2004), mais aussi la création d'un bord qui n'est pas là (voir les gestalt, des triangles de Kanizsa aux travaux de Jean Petitot) sont des structurations fortes du monde. Il n'y a pas de Mathématiques sans structures : leur analyse constitutive doit être le contraire de l'assemblage non-structuré, propre à la théorie des ensembles.

Je voudrais conclure ce paragraphe par une remarque forte, dans le dessein de renverser de fond en comble tout absolu, toute nécessité logiciste, platonicienne ou autre, y compris ceux de la théorie des ensembles, univers Newtonien où toutes les Mathématiques seraient déjà inscrites ; ces ensembles qui seraient reconnus, en tant que fondateurs, par le petit enfant mis en scène par P. Maddy. Cette remarque est inspirée par J.L. Petit, philosophe husserlien, et nous fait comprendre le rôle des analyses cognitives : *toute constitution est contingente*. C'est le parcours constitutif, par sa friction dans le monde, qui assure l'objectivité et l'efficacité des mathématiques, et cela justement puisqu'il est contingent, puisqu'il est dans l'histoire, phylogénétique et humaine. Bien évidemment, il faut donner au mot histoire et contingence le sens de l'objectivité construite du sujet cognitif, non pas celle des petites histoires psychologiques ou sociologiques : le défi scientifique est toujours dans l'équilibre difficile entre histoire possible et subjective et objectivité construite de la connaissance (voir "L'origine de la Géométrie" de Husserl). Et ce défi s'exprime quand on renonce aux absolus, indépendants de notre humanité et de ses pratiques historiques. On essaye alors de voir la montagne sur laquelle on est assis, celle du langage et de l'histoire, tout en regardant en arrière, autant que faire se peut, en vue d'une analyse des épistèmès qui puisse nous aider à regarder en avant, à expliciter la philosophie d'une construction nouvelle, au-delà des concepts et des structures que nous nous sommes donnés jusqu'à présents.

IV. En guise de conclusion, discutons l'exemple d'une gestalt constitutive des mathématiques : la ligne sans épaisseur (sans largeur, dit Euclide). Du point de vue cognitif, on peut faire référence, tout d'abord et simultanément, au rôle de :

- la saccade qui précède la proie,

- la droite vestibulaire (celle qui contribue à mémoriser et continuer le mouvement inertiel),

- la droite visuelle (qui inclut la direction détectée et anticipée par le cortex primaire).

L'isomorphisme proposé par Bernard Teissier (de Poincaré-Berthoz, selon sa définition) est entre les deux dernières expériences cognitives : l'action, le mouvement imposent (nous font pratiquer) une identification (un isomorphisme) entre l'expérience du mouvement inertiel, en ligne droite, et le regard en avant, qui précède le mouvement. Cet isomorphisme est à étendre par la poursuite oculaire (les saccades), une action aussi, et il a comme résultat, en tant que pratique pré-conceptuelle, une direction pure, sans épaisseur. L'invariant de ces trois pratiques cognitives est une ligne à peine esquissée, forme d'abstraction (pre-conceptuelle) : il est ce qui compte, ce qui est en commun, distillé dans la mémoire de l'action, pour le but de la nouvelle action.

Cette pratique donne un sens et est à l'origine de (permet) la montagne conceptuelle, langagière et historique par laquelle on arrive à proposer la ligne continue, paramétrée sur les réels à la Cantor-Dedekind. Pour le dire autrement, cette ligne sans épaisseur est l'invariant pré-conceptuel du concept mathématique, invariant par rapport à plusieurs expériences actives ; il est irréductible à une seule. Cet invariant n'est pas le concept, mais il est fondateur et lieu de la signification : on ne comprend pas ce que c'est qu'une ligne, on n'arrive pas à la concevoir, à la proposer, même dans son explicitation formelle, sans le geste vu, voire dessiné sur le tableau noir, ou senti, apprécié par le corps, grâce à l'évocation faite par le premier enseignant.

Je crois qu'il faut souligner en tout cela le rôle clé de la mémoire, dans une de ses caractéristiques les plus importantes : l'oubli. L'oubli intentionnel, résultat d'une visée (même pré-consciente, si l'on accepte d'enrichir l'intentionnalité husserlienne), est constitutif de l'invariance : à partir du rôle sélectif (intentionnel) de la vision, un regard actif, une palpation par le regard (Merleau-Ponty), jusqu'à la reconstruction en mémoire qui sélectionne intentionnellement (même inconsciemment) ce qui compte, en vue de l'action. Jusqu'à la construction conceptuelle, c'est l'oubli de… ce qui n'est pas important, relativement aux buts en question, qui précède l'explicitation de l'invariant, de ce qui est stable par rapport à une pluralité d'actions-perceptions.

Voilà donc, en partant du petit comptage animal, de l'effet SNARC à la Dehaene, cette montagne cognitive que je vois, par exemple, derrière un jugement élémentaire (irréductible à un formalisme finitaire), comme le bon ordre des entiers (un sous-ensemble générique non vide des entiers possède un plus petit élément), résultat de l'ordonnancement des pratiques numériques sur une ligne (voir Longo, 2002 et Bailly et Longo, 2004, où l'on discute de son rôle dans certaines preuves récentes d'incomplétude de l'Arithmétique). Car l'ordre structuré des entiers participe aussi du sens du mouvement, du geste qui les rangent sur une ligne, cette gestalt qui reste sur le fond, mais qui contribue à les organiser, les ranger, les "bien-ordonner" vers l'infini, dans un espace conceptuel très mathématisé. En plus, il n'est pas exclu que pour saisir l'énoncé du bon ordre, si complexe quoiqu'élémentaire, un énoncé qui, dans un certain sens est "au fini", on ait besoin d'une maîtrise de toute la ligne, donc de … la géométrie projective (ou de la perspective en peinture). Voilà ce réseau constitutif des mathématiques, en tant que discipline structurée, qui participe de la preuve, en nécessitant l'usage de gestalts complexes même en théorie des nombres.

Mais comment le prouver ? Il y a si peu de travail "gestaltiste" dans les fondements des mathématiques et, même, en cognition mathématique ! Les livres de Penelope Maddy accentuent ce manque : pour elle, suivant en cela l'orthodoxie, les mathématiques se fondant sur la théorie des ensembles, il faut chercher la cognition collectionnante, les points. Or, on vient de le dire, les mathématiques organisent les monde en tant que science des structures : les points, isolés, non-structurés, sont dérivés (comme intersection de deux lignes, dit Wittgenstein et construit Euclide). En fait, une ligne n'est pas un ensemble de points ! Elle est une gestalt. On peut la reconstruire par points (Cantor-Dedekind), mais aussi sans point (dans certains topos, Lawvere-Bell).

Voilà donc l'immense complexité cognitive (et historique) d'un jugement élémentaire, le bon ordre des entiers (dont les reconstructions *ad hoc* par des grands ordinaux sont aussi très complexes), qui transforme la preuve non pas en une chaîne de formules, mais en une géométrie de corrélations signifiantes et complexes, de renvois, de fils qui lient le raisonnement mathématique à une pluralité d'actes d'expérience, conceptuels et pré-conceptuels, ainsi qu'à d'autres structures déjà constituées des mathématiques. La force du raisonnement, voire sa certitude, est donc dans sa stabilité et son invariance, en tant qu'uniformité dynamique (et changeante au cours de l'histoire) des méthodes déductives, mais aussi dans la richesse du treillis de connections qui l'accroche à tout un univers de pratiques et de connaissances, même pre-mathématiques, voire non-mathématiques.

Pourquoi ces réflexions dans une revue de Cognition et de Philosophie ? Les mathématiques ont toujours été une composante essentielle des théories de la connaissance, chez Platon, Descartes, Kant, Husserl ou Wittgenstein. Selon moi, une des raisons de cette attention réitérée au cours de l'histoire est due à l'ancrage des mathématiques dans certains des processus fondamentaux de notre interaction avec le monde. Le geste qui trace une trajectoire, un bord, le suivi d'une proie par saccades, leur mémoire, le comptage pour garder, partager, comparer … sont parmi certains des actes les plus anciens effectués par les êtres vivants que nous sommes et participent de la construction mathématique. Il semble même que l'écriture ait commencé par l'écriture quantitative de la dette, à Sumer (voir les travaux de C. Herrenschmidt). Bref, il se peut que les premiers grands invariants conceptuels aient été proposés dans leur maximalité proprement mathématique, en tant que développements complexes, constitués dans la communication humaine, des gestes organisateurs originaires les plus fondamentaux de l'espace et de l'action. Les sciences cognitives et les mathématiques ont tout à gagner à une interaction forte, dans les deux sens, par le biais des grands problèmes des fondements de la mathématique, qui doit être conçue comme l'un des co-constitués, parmi d'autres, de l'intelligibilité du monde, mais qui se singularise de tous les autres par son invariance et sa stabilité maximale.

Les trois articles cités en référence sont téléchargeables sur : http://www.di.ens.fr/users/longo

Bailly, F., Longo, G. (2004). Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique. in *Il pensiero filosofico di Giulio Preti*, (Parrini, Scarantino eds.), Guerrini ed associati, Milano, 2004, pp. 305 - 340 (réimpression en cours aux actes du colloque en mémoire de Gilles Châtelet, Presse de rue d'Ulm, Paris, 2005).

Longo, G. (2002a). On the proofs of some formally unprovable propositions and Prototype Proofs in Type Theory. Invited Lecture, Types for Proofs and Programs, Durham, (GB); in *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2277 (Callaghan et al. eds), pp. 160 - 180, Springer, 2002.

Longo, G. (2002b). Laplace, Turing and the "imitation game" impossible geometry: randomness, determinism and programs in Turing's test. Invited Lecture, Conference on Cognition, Meaning and Complexity, Roma, June 2002b. (version française, *Intellectica*, n. 35, 2002/2, pp. 131-162 ; suivi d'une réponse aux commentaires publiés par la revue: Continu vs. discret et régimes de causalité, pp. 199-216).